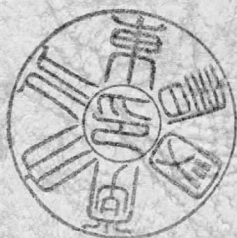


鉄筋コンクリートの劣化過程のマルチスケール・マルチフィジックス解析

著者	寺田 賢二郎
URL	http://hdl.handle.net/10097/39560



鉄筋コンクリートの劣化過程の マルチスケール・マルチフィジックス解析

(研究課題番号 17360207)

平成 17 年度～平成 18 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (B)) 研究成果報告書

平成 19 年 4 月

研究代表者 寺 田 賢 二 郎
(東北大学大学院工学研究科助教授)

鉄筋コンクリートの劣化過程の マルチスケール・マルチフィジックス解析

(研究課題番号 17360207)

平成 17 年度～平成 18 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (B)) 研究成果報告書

平成 19 年 4 月

研究代表者 寺 田 賢 二 郎
(東北大学大学院工学研究科助教授)

研究課題 鉄筋コンクリートの劣化過程のマルチスケール・マルチフィジックス解析

課題番号 17360207

研究組織

研究代表者： 寺田賢二郎 (東北大学大学院工学研究科 助教授)

研究分担者： 京谷 孝史 (東北大学大学院工学研究科 教授)
山田 真幸 (東北大学大学院工学研究科 助手)
石井 建樹 (木更津工業高等専門学校環境都市工学科 講師)

交付決定額 (配分額) (金額単位：円)

年度	直接経費	間接経費	合計
平成 17 年度	5,300,000	0	5,300,000
平成 18 年度	2,400,000	0	2,400,000
総計	7,700,000	0	7,700,000

研究成果

- (1) 石井建樹・寺田賢二郎・京谷孝史・岸野佑次: 界面要素を用いた有限被覆法に基づく破壊進展解析法の開発, 土木学会論文集 I No. 794/I-72, pp. 213–225, 2005.
- (2) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 高次有限被覆近似に基づく一般化要素の近似性能に関する一考察, 土木学会論文集 I No. 794/I-72, pp. 131–142, 2005.
- (3) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 不連続 Galerkin 有限被覆法の開発とその性能評価, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 8, pp. 215–224, 2005.
- (4) 石井建樹・寺田賢二郎・京谷孝史・岸野佑次・車谷麻緒: 不連続 Galerkin 近似による有限被覆法とその不連続面解析への適用, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 8, pp. 327–334, 2005.
- (5) 石井建樹・京谷孝史・寺田賢二郎・岸野佑次: 不連続面の摩擦接触を考慮した破壊進行の解析, 土木学会論文集 A (ONLINE ISSN: 1880-6023) Vol. 62, No. 2, pp.371–383, 2006.
- (6) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 均質化法に基づく濃度・変位場のマルチスケール・マルチフィジックス解析手法, 土木学会論文集 A (ONLINE ISSN: 1880-6023) Vol. 62, No. 2, pp.425–439, 2006.
- (7) 車谷麻緒・石幡雅弘・石井建樹・寺田賢二郎: 鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現解析とそのメカニズムに関する一考察, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 9, pp.185–194, 2006.

- (8) 石井建樹・京谷孝史・西沢直樹・寺田賢二郎: 微視的亀裂進展を考慮した非均質準脆性材料のマルチスケール解析, 応用力学論文集, 土木学会 Vol. 9, pp.273–282, 2006.
- (9) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 多孔質体微視領域での熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析, 土木学会論文集 A, Vol.62, No.4, pp.822–834, 2006.
- (10) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 多重被覆モデリングによる有限被覆法 —非均質脆性材料の不連続面進展解析—, 計算工学会論文集, 論文番号 20060029.
- (11) 車谷麻緒・寺田賢二郎: 多孔質体微視領域での熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析, 土木学会論文集 A (ONLINE ISSN: 1880-6023) Vol. 62, No. 4, pp. 822–834, 2006.
- (12) 車谷麻緒・寺田賢二郎・久田真: 鉄筋の腐食膨張のモデル化とコンクリートのひび割れ挙動の数値解析, 土木学会論文集 A (ONLINE ISSN: 1880-6023) Vol. 63, No. 1, 167–178, 2007.

目次

第1章 緒言	1
第2章 均質化法に基づく濃度・変位場のマルチスケール・マルチフィジックス解析手法	4
2.1 はじめに	4
2.2 濃度場と変位場の2変数境界値問題	5
2.2.1 拡散と変形のマルチスケール・マルチフィジックス	5
2.2.2 物質拡散の2変数境界値問題	6
2.2.2.1 非均質体の支配方程式	6
2.2.2.2 Two-scale 初期値・境界値問題	6
2.2.2.3 均質化拡散係数による弱形式	7
2.2.2.4 時間と空間の離散近似	8
2.2.3 固体変形の2変数境界値問題	9
2.2.3.1 非均質体の支配方程式	9
2.2.3.2 Two-scale 境界値問題	10
2.2.3.3 つり合い状態におけるマクロ応力	11
2.2.3.4 マクロ構造解析	12
2.2.3.5 ミクロ自己つり合い問題	13
2.2.3.6 マクロ接線係数を求めるためのミクロ問題	14
2.2.4 解析アルゴリズム	15
2.3 ミクロ損傷解析のためのボクセル解析法	15
2.3.1 ミクロスケールの解析手法	15
2.3.2 修正ボクセル有限要素法	16
2.3.2.1 積分平均化理論の導入	16
2.3.2.2 損傷によるマルチフィジックス解析	17
2.4 数値解析例	17
2.4.1 解析ステップ数に関する検証例題	17
2.4.2 定常状態の1要素数値実験	18
2.4.3 経年劣化の非定常解析	19
2.5 おわりに	19
第3章 多孔質体微視領域での熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析	34
3.1 はじめに	34

3.2	多孔質性を考慮した熱拡散の2変数境界値問題	35
3.2.1	非均質体の支配方程式	35
3.2.2	多孔質体の孔やひび割れ表面を通して熱伝達がある場合 . . .	36
3.2.3	漸近展開法に基づく定式化	36
3.2.4	ミクロからマクロへの均質化	39
3.2.5	マクロからミクロへの局所化	40
3.2.6	熱拡散問題の均質化法におけるユニットセルの特徴	41
3.2.6.1	ユニットセルにおける内部熱伝達	41
3.2.6.2	局所化におけるミクロ温度分布	42
3.3	熱拡散問題の均質化法の解析精度に関する検証例題	42
3.3.1	均質化によるマクロ問題の解析精度	42
3.3.2	局所化によるミクロ問題の解析精度	43
3.3.3	多孔質性によるミクロ熱伝達の検討	44
3.4	3次元多孔質体の熱拡散に関する数値解析例	44
3.4.1	解析対象と条件	44
3.4.2	解析結果と考察	45
3.5	おわりに	45
第4章	多重被覆モデリングによる有限被覆法	58
4.1	はじめに	58
4.2	有限被覆法	59
4.2.1	FCMの概説と近似構成要素	59
4.2.2	変位の有限被覆近似	60
4.2.3	FCMによる不連続面進展問題	61
4.2.3.1	FCMにおける不連続性の表現	61
4.2.3.2	支配方程式	61
4.2.3.3	不連続面先端へのCohesive crackモデルの適用 . . .	62
4.2.3.4	Hybrid型の弱形式	63
4.2.3.5	FCMにおける離散化方程式	63
4.2.3.6	異種材料界面の剥離	64
4.2.3.7	構成材料内部のひび割れ	65
4.2.3.8	不連続面進展解析アルゴリズム	66
4.2.4	FCMにおける数値積分	68
4.3	多重被覆モデリングによるFCM	68
4.3.1	非均質材料の有限被覆モデリング	68
4.3.2	ひび割れ進展の有限被覆モデリング	69
4.4	数値解析例	70
4.4.1	ひび割れ進展の検証例題	70
4.4.2	非均質材料におけるひび割れの進展	70
4.4.3	非均質材料における界面剥離の進展	71
4.5	おわりに	71

第5章	鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現解析とそのメカニズムに関する一考察	86
5.1	はじめに	86
5.2	ひび割れモードの分類と材料のモデル化	87
5.2.1	ひび割れモードの分類	87
5.2.2	コンクリートのモデル化	87
5.2.3	鉄筋の腐食膨張のモデル化	88
5.3	腐食膨張のモデル化に関する数値実験	89
5.3.1	解析対象と解析条件	89
5.3.2	線形解析による基礎検討	89
5.3.3	各腐食膨張モデルに対するひび割れ進展解析結果と考察	90
5.4	鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの数値実験	91
5.4.1	解析対象と解析条件	91
5.4.2	線形解析による簡易評価	91
5.4.3	ひび割れ進展解析結果と考察	91
5.5	使用環境を考慮した数値解析例	93
5.5.1	解析対象と解析条件	93
5.5.2	解析結果と考察	93
5.6	おわりに	94
第6章	結 言	109
付 録 A	熱拡散問題の均質化法に関する補足事項	111
A.1	3次元領域における積分の分離公式	111
A.1.1	体積積分の分離公式	111
A.1.2	3次元領域における積分の分離公式	111
A.2	不規則な介在物分布に対する解析精度	111
A.3	特性方程式の数値的な不安定性	112

第1章 緒 言

いわゆる塩害による鉄筋コンクリートの劣化過程は、

〔潜伏期〕 塩化物イオンが構造内部に侵入し、コンクリート材料の中性化と鉄筋付近における塩化物イオンの蓄積

〔進展期〕 塩化物イオンが限界濃度に達した際の鉄筋の腐食発生と酸素・水の供給による腐食の断続的な進行

〔加速期〕 腐食生成物（≒錆）の膨張圧による鉄筋に沿ったコンクリートの損傷（ひび割れ）

〔劣化期〕 鉄筋の断面欠損が進み、部材の耐荷性能の低下

といった物理的および化学的作用の段階ごとに説明されており、そのメカニズムも概ね明らかになってきているものの、構造全体の劣化予測を可能とするような数値解析技術は未だ開発段階にあると認識している。特に、鉄筋の腐食因子のコンクリート内部での移動現象を再現するのに必要とされる拡散特性や、コンクリート材料の剛性・強度などの力学特性の経時的な変化については、考慮していないか経験的なモデルを導入するに留まっている。従来の劣化予測モデルが、これらの特性の非定常な変化を的確に考慮していない、あるいは評価できていない理由として、物理的作用によるコンクリート材料内部における微視的非均質性の構造特性が経時的に変化することを反映していないことが挙げられる。また、微視的（ミクロ）構造内部での物理および化学的作用を解析できたとしても、これをコンクリートの平均的な（マクロな）特性として評価するための方法論も整備・導入されていない。

そこで本研究では、コンクリートをモルタル・粗骨材からなる2相複合材料と見なして、鉄筋コンクリート構造における、

- (a) コンクリート材料の温度変化に起因した膨張収縮（およびひび割れ）過程（物理的作用）
- (b) 鉄筋の腐食因子（水・酸素・二酸化炭素・塩化物イオンなど）の拡散過程（物質移動）
- (c) 腐食因子による不動態皮膜の欠損と鉄筋の腐食過程（電気化学的作用）
- (d) 腐食生成物（≒錆）の膨張によるコンクリート材料の損傷過程（物理的作用）

の各劣化プロセスについて、ミクロ構造内部（代表体積要素）における物理的および電気化学的作用の相互作用を考慮して数値的に評価し、構造全体の寿命予測を可能とするマルチスケール・マルチフィジックス解析手法を構築する。

具体的には、コンクリート材料における微視的非均質性としてモルタルと粗骨材からなる2相複合構造に着目し、これをマイクロ構造（代表体積要素：RVE）とみなして均質化法を適用することで、コンクリートのマクロな浸透／拡散特性、剛性、膨張収縮特性、強度特性などの経時的な変化過程を評価し、これらのマクロ特性を用いた非定常熱伝導・物質拡散・変形応力解析を行う。この際、マイクロ構造内部で起こりうる様々な熱力学的挙動および化学反応に起因して、セメント硬化体の劣化、モルタル・骨材界面の剥離、メゾスケールの（代表体積をまたぐほどのサイズの）ひび割れ発生など、マイクロな構造形態が変化することを考慮したマクロな特性評価を行う。そして、これらの特性を用いたマクロな非定常濃度拡散解析から得られる鉄筋付近での塩化物イオン濃度や応力ひずみ分布をもとに腐食過程とそれに伴う鉄筋に沿ったコンクリートのひび割れの数値解析を実施し、鉄筋コンクリート構造全体の耐荷力低下の予測を行う。

本報告書は以下のように構成されている：

第2章：均質化法に基づく濃度・変位場のマルチスケール・マルチフィジックス解析手法

非均質脆性材料の環境劣化現象を解析するためのマルチスケール・マルチフィジックス問題を定式化し、その数値解析システムを構築する。具体的には、物質拡散問題と固体変形問題の物理現象の連成をモデル化し、均質化法を用いることにより、各物理問題における材料のマイクロ挙動とマクロ応答を数学的にリンクさせる。

第3章：多孔質体微視領域での熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析

多孔質体の加熱・冷却作用に対する流体・固体の熱交換問題や、多孔質性や微細ひび割れを有するコンクリートの拡散問題における固体の熱伝導解析手法に着目し、多孔質体ミクロスケールにおける孔表面での内部熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析手法を構築する。加えて、新たに定式化した均質化法について、力学問題の均質化法とは異なる数学的および数値解析的特徴を整理する。

第4章：多重被覆モデリングによる有限被覆法

定型メッシュを用いて非均質脆性材料の不連続面進展解析が可能な有限被覆法を開発する。具体的には、まず定型メッシュを用いた2相複合材料の解析、およびその界面剥離やひび割れ進展を含む不連続面進展解析の定式化や解析手順を述べる。そして、介在物が密に配置された問題に対して、レベルセットを用いた被覆ベースのモデリング手法を示し、簡単な検証例題や数値解析例を示し、本解析手法の妥当性や有効性を検討する。

第5章：鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現解析とそのメカニズムに関する一考察

前章で開発したFCMによるひび割れ進展解析法を用いて、RC構造の塩害劣化の重要な指標である鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードについて、一般化有限要素法を用いた数値解析による分類と再現を試みる。具体的には、まず、鉄筋の腐食膨張のモデル化における、強制変位・荷重・膨張応力などの各制御方法に

対して、コンクリートのひび割れ挙動を考察するとともに、RC 構造の塩害劣化の重要な指標である鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現性について検討する。次に、松島・堤らが実験で示したコンクリートひび割れモードの再現解析を試み、各ひび割れモードの発現機構やひび割れ形成メカニズム・劣化進行速度などについて考察する。最後に、これらの結果をふまえて、死荷重が作用する実構造物を模擬した数値解析例を示し、塩害劣化における使用環境の影響についても考察する。

第 6 章: 結論

本研究では、鉄筋コンクリートの構造的および材料的な劣化を予測可能なシステムの構築を試みるが、その過程において、コンクリートを 2 相複合材料とみなした際のミクロ構造の役割を明らかにすることができ、塩害についてのマクロな視点から経験的に既知とされている事象について、新しい知見を与えうると期待される。特に、熱・化学種などの力学的要因以外の場が微視スケールにおける構造的な劣化を招き、この構造的な劣化がマクロな材料特性の劣化を支配し、ひいては鉄筋コンクリート構造の局所的小および大域的な耐力低下につながる、というように劣化プロセスをマルチスケール・マルチフィジックス現象として捉えたモデル化と数値解析は、計算工学的にも興味深い試みであり、その技術が完成すれば他の工学分野へも応用でき利用価値が高いといえる。

第2章 均質化法に基づく濃度・変位場のマルチスケール・マルチフィジックス解析手法

2.1 はじめに

近年、コンクリート構造物に見られるアルカリ骨材反応・化学的浸食・凍害などの環境劣化現象は、社会的重要度の高い土木構造物において、特に問題視されている。これらの現象の多くは、化学物質や温度の拡散現象と熱あるいは化学反応による膨張・収縮や外荷重による変形などの力学現象の連成問題と捉えることができる。加えて、これらの現象は、コンクリートの材料組成だけでなく、内部構造の非均質性に起因した力学作用との連成現象と捉えられ、微視的に発生するひび割れなどの力学挙動は年月の経過とともに、巨視的変形性能や強度の劣化、あるいは拡散特性の変化を伴うことになる。したがって、コンクリート構造物に代表的な環境劣化現象の数値解析を実践するには、ミクロなひび割れによりマクロ物性が経年的に変化していく過程をグローバル・ローカルのモデル化するなど、異なる物理現象の連成現象（マルチフィジックス）と異なる空間スケールの連成現象（マルチスケール）を同時に考慮する必要がある。

一方、近年の計算機支援の材料力学分野では、材料の微視的非均質性に着目した研究が盛んに行われており、特に均質化法 [1, 2, 3] を用いたマルチスケール解析が注目を集めている。均質化法を用いることにより、材料のミクロおよびマクロスケールの関係を数学的にリンクさせることができ、物理問題を限定しないことから、力学問題 [3, 4] をはじめ、浸透流 [5] や熱伝導問題 [6]、多重複合物理問題 [7] などに広く応用されている。しかしながら、均質化法を用いて、コンクリートに代表される経時的な環境劣化現象を題材としたマルチスケール・マルチフィジックス問題を扱った例はない。

材料の環境劣化を的確に再現するには、グローバル・ローカルの視点からマルチフィジックス現象を経時的に評価することが理想的となる。しかしながら、コンクリートを対象とした物質輸送と力学作用の連成解析の分野では、コンクリート内部構造の非均質性に着目した研究例は少ない [8]。広くは、マクロな劣化のみを解析するケースが多数を占めており、不連続変形解析のための剛体バネモデルと物質拡散解析のためのトラモデルを組み合わせた手法でもミクロとマクロの連成作用は考慮されていない [9, 10]。一方、前川・石田ら [11, 12] は、コンクリートのミクロ組織における様々な物理現象を現象論的にモデル化し、マクロな解析へと発展させ

ているが、コンクリート内部の幾何学的な非均質性は考慮されておらず、異なる空間スケールでの力学的な連成作用を厳密には扱っていない。Gawin *et al.*[13, 14] は、高温湿度下におけるコンクリートの材料劣化に対して、マクロな劣化挙動を表現するために、様々な物理モデルを絡めてモデル化しているが、微視的な劣化に基づくものとはなっていない。これに対して、Yu and Fish[7] は、均質化法を用いて空間と時間のスケールを均質化させる熱・固体変形のマルチスケール・マルチフィジックス問題を定式化しているものの、経時的な材料劣化のような非線形問題をグローバル・ローカル的に解析するものではない。

そこで本章では、非均質脆性材料の環境劣化現象を解析するためのマルチスケール・マルチフィジックス問題を定式化し、その数値解析システムを構築する。具体的には、物質拡散問題と固体変形問題の物理現象の連成をモデル化し、均質化法を用いることにより、各物理問題における材料のミクロ挙動とマクロ応答を数学的にリンクさせる。以下では、まず濃度場と変位場のマルチスケール・マルチフィジックス問題を定式化し、その具体的な数値解析アルゴリズムを提案する。次に、ミクロスケールにおける脆性的な劣化を表現するためのイメージベース解析法について述べる。そして最後に、環境作用を受ける非均質脆性材料の経年的な劣化現象の数値解析例を示し、本研究で開発したマルチスケール・マルチフィジックス解析手法の有効性を例示する。

2.2 濃度場と変位場の2変数境界値問題

本節では、濃度場と変位場のマルチスケール・マルチフィジックス問題の定式化を示す。はじめに、本研究で考慮するマルチスケール・マルチフィジックス問題における連成作用について説明し、その定式化や解析手順について述べる。

2.2.1 拡散と変形のマルチスケール・マルチフィジックス

一般に、物質拡散問題と固体変形問題は互いに連成することは少ないが、コンクリートの環境劣化のように化学的な作用や脆性的な損傷が発生する場合には双方向の連成が起こる。具体的に、本研究で考慮する双方向の連成作用は次の通りである。

- ミクロスケールおよびマクロスケールにおける拡散および化学的作用による力学的な膨張・収縮作用（拡散 → 固体変形）
- ミクロスケールおよびマクロスケールにおける力学的なひび割れ形成と劣化による拡散特性や拡散経路の変化（固体変形 → 拡散）

2.2.2 物質拡散の2変数境界値問題

2.2.2.1 非均質体の支配方程式

なめらかな境界 Γ^ϵ を有する時刻 $t \in (0, T]$ での濃度分布を $C^\epsilon(x, t)$ とするとき、移流のない物質拡散問題の支配方程式は次式で与えられる。

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}^\epsilon + f^\epsilon = \dot{C}^\epsilon \quad \text{in } \Omega_t^\epsilon \times (0, T] \quad (2.1)$$

ここで、 ∇ は微分オペレータ、 f^ϵ は領域内部における物質発生源、 \dot{C}^ϵ は濃度の時間微分であり、また濃度 C^ϵ は次式で与えられる物質拡散に関する構成方程式 (Fick の法則) によって物質流束 $\mathbf{J}^\epsilon(x, t)$ と関係付けられている。

$$\mathbf{J}^\epsilon = -\mathbf{k}^\epsilon \nabla C^\epsilon \quad (2.2)$$

ここに、 $\mathbf{k}^\epsilon(x)$ は正値対称な物質拡散係数テンソルである。

また、境界 Γ^ϵ では次の濃度境界・物質流束境界の2つの境界条件が与えられるものとする。

$$C^\epsilon = \hat{C} \quad \text{on } \Gamma_C \times (0, T] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J}^\epsilon \cdot \mathbf{n} = \hat{p} \quad \text{on } \Gamma_p \times (0, T] \quad (2.4)$$

ここで、 $\Gamma^\epsilon = \Gamma_C \cup \Gamma_p$ かつ $\Gamma_C \cap \Gamma_p = \emptyset$ であり、 \mathbf{n} は Γ_p 上で定義される外向き単位法線ベクトルである。また、 \hat{C} は境界 Γ_C に与えられる濃度、 \hat{p} は境界 Γ_p を通して与えられる物質流束である。そして、次式のような初期条件を与える必要がある。

$$C^\epsilon(x, 0) = C_0^\epsilon(x) \quad \text{in } \Omega_t^\epsilon|_{t=0} \quad (2.5)$$

以上の支配方程式で記述される物質拡散現象の初期値・境界値問題は、 $\bar{C}^\epsilon(x, t)$ を試験関数とする次の変分方程式 (弱形式) と等価である。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t^\epsilon} \bar{C}^\epsilon \dot{C}^\epsilon d\Omega + \int_{\Omega_t^\epsilon} \nabla \bar{C}^\epsilon \cdot \mathbf{k} \nabla C^\epsilon d\Omega \\ = \int_{\Omega_t^\epsilon} \bar{C}^\epsilon f^\epsilon d\Omega + \int_{\Gamma_p} \bar{C}^\epsilon \hat{p} d\Gamma \quad \forall \bar{C}^\epsilon, t \in (0, T] \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2.2.2 Two-scale 初期値・境界値問題

本研究では、Terada and Kikuchi[3] と同様に、Allaire の Two-scale 収束論 [15] を用いた定式化を行う。その誘導の詳細は文献 [3] に譲り、ここでは結果として得られるマルチスケール境界値問題のみを示す。Two-scale 収束論の適用により、マクロおよびミクロスケールに関する弱形式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{C}^0 \dot{C}^0 dx + \int_{\Omega} \nabla_x \bar{C}^0 \cdot \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \mathbf{k} (\nabla_x C^0 + \nabla_y C^1) dy dx \\ = \int_{\Omega} \bar{C}^0 \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} f dy dx + \int_{\Gamma_p} \bar{C}^0 \hat{p} d\Gamma \quad \forall \bar{C}^0, t \in (0, T] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\int_{Y_t} \nabla_y \bar{C}^1 \cdot k (\nabla_x C^0 + \nabla_y C^1) dy = 0 \quad \forall \bar{C}^1, t \in (0, T] \quad (2.8)$$

ここで、上添え字0と1はそれぞれマクロ変数とミクロ変数を表す。式(2.7)は、ミクロ濃度 $C^1(x, y, t)$ が与えられれば標準的な非定常拡散問題の支配方程式である。一方、式(2.8)は時間発展方程式ではないので、ミクロ濃度 $C^1(x, y, t)$ の時間依存性はデータとみなされるマクロ濃度 $C^0(x, t)$ と Y_t によるものであることに注意されたい。なお、本論文で対象としている現象は、時間軸について変動する物理場の時間平均の応答を知るべきものではないので、ミクロ（速い）時間とマクロ（遅い）時間を設定して漸近挙動を記述する必要がないことを付記しておく [16]。

2.2.2.3 均質化拡散係数による弱形式

式(2.7)と式(2.8)は、マクロ濃度 $C^0(x, t)$ とミクロ濃度 $C^1(x, y, t)$ が連成した Two-scale 初期値・境界値問題であるが、濃度場に関して線形性を仮定できるので、次式のようにミクロ濃度 $C^1(x, y, t)$ がマクロ濃度勾配に比例することが分かり、マクロとミクロの支配方程式の連成を緩和することができる。

$$C^1(x, y, t) = -\zeta^j(y) \frac{\partial C^0(x, t)}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

ここで、 $\zeta^j(y)$ は単位マクロ濃度勾配の j 成分を与えたときのユニットセルの Y -周期的な応答関数あり、特性関数と呼ばれている。式(2.9)をミクロスケールの弱形式(2.8)に代入すれば、特性関数 ζ^j を未知変数とする次の方程式が得られる。

$$\int_{Y_t} \nabla_y \bar{C}^1 \cdot k \nabla_y \zeta^j dy = \int_{Y_t} \nabla_y \bar{C}^1 \cdot k I^j dy \quad \forall \bar{C}^1 \quad (2.10)$$

ここに、 I^j は各 j 成分の単位マクロ濃度勾配ベクトルであり、3次元問題の場合は上式を3種類の $\zeta^j (j = 1, 2, 3)$ についてそれぞれ解くことになる。また、ユニットセルの領域 Y_t は本来マクロ物質点に対応して決まる領域であるが、ミクロスケールの支配方程式に対してマクロ変数はパラメータとみなされるので、特性関数 ζ^j に対しても x はパラメータにしか過ぎない。同様に、 Y_t は経時的に変化するが、式(2.10)は時間発展方程式ではないので ζ^j は時間に依存した変数ではなく時刻 t はパラメータとみなされる。

一方、 C^1 の関係式(2.9)をマクロスケールの弱形式(2.7)に代入することにより、マクロスケールの濃度 C^0 に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{C}^0 \dot{C}^0 dx + \int_{\Omega} \nabla_x \bar{C}^0 \cdot k_t^H \nabla_x C^0 dx \\ = \int_{\Omega} \bar{C}^0 f_t^H dx + \int_{\Gamma_p} \bar{C}^0 \hat{p} d\Gamma \quad \forall \bar{C}^0, t \in (0, T] \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで、 k_i^H は均質化物質拡散係数テンソル、 f_i^H は均質化物質発生源であり、それぞれ次式で定義される。

$$k_i^H = \frac{1}{|Y_i|} \int_{Y_i} (k - k \cdot \nabla_y \zeta) dy \quad (2.12)$$

$$f_i^H = \frac{1}{|Y_i|} \int_{Y_i} f dy \quad (2.13)$$

ここで、特性関数 ζ を第 j 成分に持つ行ベクトルを ζ と表記した。本研究ではミクロスケールでの経時的な構造上の損傷、すなわちひび割れを考慮しており、これを反映して評価されるマクロ物性 k_i^H もユニットセルが Y_i が時間発展するに伴って経時的に変化することになる。

2.2.2.4 時間と空間の離散近似

マクロスケールおよびミクロスケールの空間方向の離散化に対して通常の有限要素法を適用すると、マクロスケールの弱形式(2.11)は、行列形式により次式で表される。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{C}} + \mathbf{K}\mathbf{C} = \mathbf{F} \quad (2.14)$$

ここで、 \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{F} は次の項を離散化したものであり、 \mathbf{C} は濃度ベクトル、上付き「 \cdot 」は時間微分を表す。

$$\mathbf{M} \Leftarrow \int_{\Omega} \bar{C}^0 \dot{C}^0 dx \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K} \Leftarrow \int_{\Omega} \nabla_x \bar{C}^0 \cdot k_i^H \nabla_x C^0 dx \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F} \Leftarrow \int_{\Omega} \bar{C}^0 f_i^H dx + \int_{\Gamma_p} \bar{C}^0 \hat{p} d\Gamma \quad (2.17)$$

時間を $[0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}]$ のように分割して、非定常物質拡散問題における時間方向の離散化手法として差分法を適用する。また、本研究では後述するように変形場との弱連成解析を前提としており、時間依存性を示す係数行列 \mathbf{K} や右辺データベクトル \mathbf{F} は時刻 t_n での値を用いて評価することにする。具体的には、 $\Delta t := t_{n+1} - t_n$ として後退オイラー差分法を適用すると、時刻 t_{n+1} における式(2.14)は次式で表される。

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{K}_n \right) \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{F}_n + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{C}^n \quad (2.18)$$

ここで、係数行列 \mathbf{K} などの時間変化はミクロ構造の経時的劣化に起因することを想定しているが、その劣化自体が濃度拡散に起因して発生するので、時間ステップ $[t_n, t_{n+1}]$ における拡散挙動は厳密には非線形である。しかし本研究では、解析の容易さを考慮して、微小時間内での線形性を仮定して上式のように陽的に扱うことにする。この陽的近似と弱連成解法による数値解の妥当性については、後に実際の数値解析において例証することにする。

2.2.3 固体変形の2変数境界値問題

本節では、マルチスケール濃度拡散問題により濃度分布が与えられた際の非線形マルチスケール固体変形問題について述べる。なお、本研究では界面破壊やひび割れなどによる非線形性を扱うものとし、固体は線形弾性体を仮定する。

また、慣性力は無視できるほど小さいと仮定して、準静的な平衡状態をのみを考慮するが、拡散物質の化学的作用に伴う固体の膨張によってひび割れが生成され、微視的非均質性が時間的に変化するので、固体の力学挙動は実時間との何らかの対応を取っておく必要がある。しかしながら、一般に固体の弾性変形およびひび割れの速度は濃度拡散の速度に対して極端に大きいと考えられるので、変形に対する時間軸は濃度拡散に関する時間軸に一致させても差し支えない。以下では、ある時刻 t における平衡状態を考え、固体変形の Two-scale 境界値問題を定式化する。

2.2.3.1 非均質体の支配方程式

図-2.1 を参照し、周期的なマイクロ構造を有する非均質体 Ω_l の応力 $\sigma^\epsilon(x, t)$ についての支配方程式とひずみ $\epsilon^\epsilon(x, t)$ の適合条件式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \sigma^\epsilon + \rho^\epsilon \hat{b}^\epsilon = 0 \quad (2.19)$$

$$\epsilon^\epsilon = \frac{1}{2} \{ \nabla u^\epsilon + u^\epsilon \nabla \} = \nabla^{(s)} u^\epsilon \quad (2.20)$$

ここで、 $u^\epsilon(x, t)$ は変位、 $\rho^\epsilon(x, t)$ は密度、 $\hat{b}^\epsilon(x)$ は単位密度に作用する物体力であり、 $\nabla^{(s)}$ は勾配の対称部分をつくる演算子である。また、応力 σ^ϵ とひずみ ϵ^ϵ および濃度に比例した化学的作用による膨張を関係付ける構成方程式には次式を仮定する。

$$\sigma^\epsilon = \tau^\epsilon - \Delta C^\epsilon \beta^\epsilon = c^\epsilon : \epsilon^\epsilon - \Delta C^\epsilon \beta^\epsilon \quad (2.21)$$

式中の $\tau^\epsilon := c^\epsilon : \epsilon^\epsilon$ は弾性変形のみから発生する応力であり、 c^ϵ は弾性テンソル、 ΔC^ϵ はマルチスケール物質拡散解析から得られる濃度変化である。また、 $\Delta C^\epsilon \beta^\epsilon$ は線膨張応力であり、係数テンソル β^ϵ の成分は次式で与えられるものとする。

$$\beta^\epsilon = \begin{bmatrix} \beta_1^\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3^\epsilon \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

一方、境界 Γ には次の2種類の境界条件が与えられる。

$$u^\epsilon = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2.23)$$

$$\sigma^\epsilon \cdot n = \hat{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (2.24)$$

ここで、 $\Gamma^\epsilon = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ かつ $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ であり、 \hat{u} と \hat{t} はそれぞれの境界にデータとして与えられる変位と分布外力である。ただし、微視的非均質性の時間変化により境界の幾何学的性状は変化しない、あるいは変化しても影響が小さいものと仮定する。

以上の支配方程式で表される化学的変形を考慮した固体変形問題の境界値問題を解くことは、 $\bar{\mathbf{u}}^\epsilon$ を試験関数とする次の変分方程式（弱形式）と適合関係式(2.20)および構成式(2.21)を合わせて解くことと等価である。

$$\int_{\Omega_t^\epsilon} \nabla \bar{\mathbf{u}}^\epsilon : \boldsymbol{\sigma}^\epsilon d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^\epsilon \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_t^\epsilon} \bar{\mathbf{u}}^\epsilon \cdot \rho^\epsilon \hat{\mathbf{b}} d\Omega \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^\epsilon, t \in (0, T] \quad (2.25)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{b}}^\epsilon(\mathbf{x})$ や $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ などの外力は時間に依存しない一定値を仮定する。すなわち固体の変形挙動は、一定の外荷重下において、物質濃度の化学的作用による膨張ひび割れという、微視的非均質性の経時的変化に伴って進行するものとする。

2.2.3.2 Two-scale境界値問題

上で示したマルチスケール物質拡散問題と同様に、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考え、Two-scale収束論を適用することにより、ミクロスケールの境界値問題は次のようになる。

$$\int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \boldsymbol{\sigma} dy = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^1, t \in (0, T] \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta C^0 \boldsymbol{\beta} \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_x^{(s)} \mathbf{u}^0 + \nabla_y^{(s)} \mathbf{u}^1 \quad (2.28)$$

ここで、 $\Delta C^0(\mathbf{x}, t)$ はマクロ濃度変化であり、前項のマクロ初期値・境界値問題(2.11)の解であり、 $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ はミクロスケールにおいて式(2.21)と同様の関係にある応力とひずみである。また、 \mathbf{u}^0 はマクロ変位、 \mathbf{u}^1 は非均質性に起因する Y -周期的なミクロ変位であり、純粋な変形による周期変位と膨張による周期変位を含んでいる。これを用いて、ユニットセルの全変位 \mathbf{w} は次のように与えられる。

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \left(\nabla_x^{(s)} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (2.29)$$

一方、マクロスケールの弱形式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega_t} \nabla_x^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^0 : \boldsymbol{\Sigma} dx = \int_{\Omega_t} \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \rho^H \hat{\mathbf{b}} dx + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^0, t \in (0, T] \quad (2.30)$$

ここで、平均密度、マクロ応力、マクロひずみの各変数は次式のように対応するミクロ変数の体積平均で定義している。

$$\rho^H(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy \quad (2.31)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dy \quad (2.32)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dy = \nabla_x^{(s)} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) \quad (2.33)$$

以上の方程式は、線形性を仮定すれば、変位場 $\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ や濃度場 $C^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ の漸近展開形を仮定して定式化を進めても導出可能であることを付記しておく。

ここで導出した固体変形の Two-scale (2 変数) 境界値問題においては、ミクロ・マクロ両スケールの化学的膨張量 β に関する項が各弱形式に加わっている点が一般的な力学問題の 2 変数境界値問題と異なっている。すなわち、ミクロおよびマクロスケールの変形状態を求めるには、通常の力学的な変形とともに、拡散に関する 2 変数初期値・境界値問題を解いて得られる物質濃度の化学的作用による膨張の 2 つを評価しなければならない。

また、この膨張に起因して生ずるひび割れは物質濃度が拡散する時間と同時進行すると考えれば、微視的非均質性の経時的変化はユニットセルの (準静的) 非線形力学応答と捉えられる。そして、固体変形のマクロ応答 (およびマクロ物性) は対応するミクロ応答の平均挙動として得られるが、これは逆にミクロ挙動にも影響しているので、ひび割れに伴うミクロスケールでの構造的な変化はマクロ的には材料非線形性として捉えることができる。したがって、濃度拡散の定式化における時間差分を導入すれば、マクロ構造の微小時間 $\Delta t := t_{n+1} - t_n$ におけるマクロな変形過程は非線形問題であり、従来のミクロ・マクロ連成非線形解析 [3] の枠組みでマクロ物性の経時的変化に伴う平衡状態の変化を評価することができる。

以下では、マクロ応力を再定義した後、ミクロスケールの弱形式 (2.26) とマクロスケールの弱形式 (2.30) とを連成させる非線形解析に Newton-Raphson 法を適用する際の定式化の詳細を示す。

2.2.3.3 つり合い状態におけるマクロ応力

式 (2.32) で定義したマクロ応力 Σ は、ミクロ応力 σ の体積平均で与えられるが、式 (2.27) よりミクロ応力 σ は純粋な変形による応力と膨張による応力で構成されている。以下では、時刻 t のつり合い状態におけるマクロ応力 Σ を別の方法で表記しておく。

まず、式 (2.26) のミクロつり合い式はマクロひずみ E_t と式 (2.27), (2.28) を用いて次のように書き換えられる。

$$\int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : \left[c : (E_t + \nabla_y^{(s)} u^1) - \Delta C^0 \beta \right] dy = 0 \quad (2.34)$$

ここで、ミクロ周期変位 u^1 が次式のように、マクロひずみと濃度変化に比例するものと仮定する。

$$u^1 = -\chi_{kh}^t E_t^{kh} + \Delta C^0 \psi^t \quad (2.35)$$

上式における χ_{kh} は、 E の kh 成分ごとに定義される単位マクロひずみに対するミクロ周期変位に相当する特性関数と呼ばれるものである。同様に、 ψ は単位濃度変化の膨張量に対するミクロ周期変位に相当する特性関数である。これを式 (2.34) に代入すると次式を得る。

$$\int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : c : (I_{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^t) E_t^{kh} dy + \int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : \Delta C^0 (c : \nabla_y^{(s)} \psi^t - \beta) dy = 0 \quad (2.36)$$

この式が恒等的に成り立つには、以下の2つのミクロスケールにおける境界値問題の解が存在すればよい。

$$\int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \mathbf{c} : \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^t dy = \int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \mathbf{c} : \mathbf{I}_{kh} dy \quad (2.37)$$

$$\int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \mathbf{c} : \nabla_y^{(s)} \psi^t dy = \int_{Y_t} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \boldsymbol{\beta} dy \quad (2.38)$$

特性関数 χ_{kh} については、2次元問題なら3成分、3次元問題なら6成分の単位マクロひずみ \mathbf{I}_{kh} をそれぞれ代入して算出することになる。

一方、式(2.35)を式(2.27), (2.28)に代入すると、この特性関数を用いてミクロ応力 $\boldsymbol{\sigma}$ が次のように定義できる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\mathbf{I}_{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^t) \mathbf{E}_t^{kh} - \Delta C^0 (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c} : \nabla_y^{(s)} \psi^t) \quad (2.39)$$

したがって、式(2.32)よりマクロ応力 $\boldsymbol{\Sigma}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dy = \mathbf{C}_t^H : \mathbf{E}_t - \Delta C^0 \mathbf{B}_t^H \quad (2.40)$$

ここで、 \mathbf{C}_t^H は均質化弾性テンソル、 \mathbf{B}_t^H は均質化膨張応力テンソルであり、それぞれ次のように定義される。

$$\mathbf{C}_t^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} \mathbf{c} : (\mathbf{I}_{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^t) dy \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B}_t^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c} : \nabla_y^{(s)} \psi^t) dy \quad (2.42)$$

2.2.3.4 マクロ構造解析

前項の定式化では、時刻 t において線形挙動を仮定したが、実際は時間の経過に伴ってミクロ構造内にひび割れが生じて、これに起因してマクロ材料挙動は非線形となる。以下では、この非線形問題をNewton-Raphson法で解く際の定式化を与える。

今、時刻 t_n までの変形状態がすべて既知であるとして、Newton-Raphson法による反復計算により、時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における変形状態を求めることを考える。

マクロ変数を求める際のNewton-Raphson反復過程における第 (i) 反復ステップでの不釣り合い力を次のように定義する。

$$G(\mathbf{U}^{(i)}; \bar{\mathbf{u}}^0) := \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \nabla_x^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^0 : \mathbf{T}(\mathbf{U}^{(i)}) dx - F(\bar{\mathbf{u}}^0) \neq 0 \quad (2.43)$$

ここで、 \mathbf{U} はマクロ変位、 \mathbf{T} はマクロ応力であり、外荷重 F はマクロ膨張係数テンソル \mathbf{B} を用いて次のように置き換えた。

$$F(\bar{\mathbf{u}}^0) := \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \rho^H \hat{\mathbf{b}} dx + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{u}}^0 \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_{t_{n+1}}} \nabla_x^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^0 : \Delta C^0 \mathbf{B} dx \quad (2.44)$$

次に、マクロ変位増分の修正量について線形化を行うことにより、Newton-Raphson 法のための線形化方程式が得られる。

$$DG(U^{(i)}; \bar{u}^0)[\delta U^{(i+1)}] = -G(U^{(i)}; \bar{u}^0) \quad (2.45)$$

ここで、 DG は G の修正量 δU についての方向微分を表しており、次のように定義される。

$$\begin{aligned} DG(U^{(i)}; \bar{u}^0)[\delta U^{(i+1)}] \\ &:= \int_{\Omega_{t_n}} \nabla_x^{(s)} \bar{u}^0 : \frac{\partial T_{t_n}}{\partial E} : \nabla_x^{(s)} \delta U^{(i+1)} dx \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$= \int_{\Omega_{t_n}} \nabla_x^{(s)} \bar{u}^0 : A_{t_n}^{(i)} : \nabla_x^{(s)} \delta U^{(i+1)} dx \quad (2.47)$$

ここで、 $A^{(i)}$ はマクロ接線係数であり、次式で置き換えた。

$$A_{t_n}^{(i)} := \frac{\partial T_{t_n}}{\partial E} \quad (2.48)$$

2.2.3.5 ミクロ自己つり合い問題

ミクロスケールのつり合い方程式を次のように置き換える。

$$g(u; \bar{u}^1) := \int_{Y_{t_n}} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : \tau dy - \int_{Y_{t_n}} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : \Delta C^0 \beta dy = 0 \quad (2.49)$$

いま、つり合い状態にある時刻 t_n から t_{n+1} のつり合い状態を求めるためのマクロスケールにおける第 (i) 反復ステップを考える。このとき、ミクロ構造のつり合い方程式において、濃度変化 ΔC^0 によるマクロ膨張量を含んだ荷重に相当するマクロひずみ $E^{(i)}$ に対する自己つり合い状態を満たす Y -周期的なミクロ変位 u を求めればよい。

ミクロスケールに対する Newton-Raphson 反復計算の第 (j) 反復ステップにおける残差を考える。

$$g(u^{(j)}; \bar{u}^1) \neq 0 \quad (2.50)$$

次に、 δu についての線形化を行うことにより、Newton-Raphson 法によるミクロ変位増分の修正量 $\delta u^{(j+1)}$ を求めるための線形化方程式を得る。

$$Dg(u^{(j)}; \bar{u}^1)[\delta u^{(j+1)}] = -g(u^{(j)}; \bar{u}^1) \quad (2.51)$$

ここで、 Dg は $g(u^{(j)}; \bar{u}^1)$ の方向微分を表し、次のように評価される。

$$\begin{aligned} Dg(u^{(j)}; \bar{u}^1)[\delta u^{(j+1)}] \\ &= \int_{Y_{t_n}} \nabla_y^{(s)} \bar{u}^1 : \frac{\partial \tau^{(j)}}{\partial \epsilon^{(j)}} : \nabla_y^{(s)} \delta u^{(j+1)} dy \end{aligned} \quad (2.52)$$

このように、濃度変化による膨張を含んだマクロひずみを外的作用と見なすことにより、通常の有限要素解析と同様に扱えばよいことになる。なお、本研究では線形弾性体の構成関係を仮定するため、上式におけるミクロ接線係数は次式と等価である。

$$\frac{\partial \tau^{(j)}}{\partial \epsilon^{(j)}} = c \quad (2.53)$$

2.2.3.6 マクロ接線係数を求めるためのミクロ問題

時刻 t_n におけるつり合い状態から次の時刻 t_{n+1} となり、マクロ構造に対する反復計算の第 $(i+1)$ 反復ステップでの修正量を求める問題を考える。このとき、第 (i) 反復ステップではマクロ構造のつり合いは満足されていないものの、この応力状態に対応したミクロ構造の自己つり合い状態は満足されており、このときのミクロ状態変数を上付き添え字 (F) で表すことにする。

$$\mathbf{w}^{(F)} = \mathbf{E}^{(i)} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^{(F)} \quad (2.54)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(F)} = \nabla_y^{(s)} \mathbf{w}^{(F)} \quad (2.55)$$

また、このときのミクロ応力 $\boldsymbol{\tau}^{(F)}$ も既に求められており、次のミクロ自己つり合い状態が成立している。

$$g(\mathbf{w}^{(F)}; \bar{\mathbf{u}}^1) = \int_{Y_m} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \boldsymbol{\tau}^{(F)} dy - \int_{Y_m} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \Delta C \boldsymbol{\beta} dy = 0 \quad (2.56)$$

このとき、ユニットセル内の変位増分 $\delta \mathbf{w}^{(F)}$ についての方向微分をとると次式となる。

$$Dg(\mathbf{w}^{(F)}; \bar{\mathbf{u}}^1) [\delta \mathbf{w}^{(F)}] = 0 \quad (2.57)$$

さらに、上式は膨張による項が消えた形で次のように表現される。

$$\int_{Y_m} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \mathbf{c} : [\delta \mathbf{E}^{(i)} + \delta(\nabla_y^{(s)} \mathbf{u}^{(F)})] dy = 0 \quad (2.58)$$

ここで、ミクロ周期変位の修正量 $\delta \mathbf{u}^{(F)}$ が、次式で表されるようにマクロひずみの修正量 $\delta \mathbf{E}^{(i)}$ に比例すると仮定する。

$$\delta \mathbf{u}^{(F)} = \chi_{kh}^{(F)} \delta \mathbf{E}^{kh} \quad (2.59)$$

上式における $\chi_{kh}^{(F)}$ は、 $\delta \mathbf{E}^{(i)}$ の kh 成分ごとに定義される単位マクロひずみに対するミクロ周期変位に相当する特性関数と呼ばれるもので、式 (2.59) を式 (2.58) に代入することで得られる次の関係式により求められる。

$$\int_{Y_m} \nabla_y^{(s)} \bar{\mathbf{u}}^1 : \mathbf{c} : [\mathbf{I}^{kh} - (\nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^{(F)})] dy = 0 \quad (2.60)$$

この特性関数を用いてミクロひずみの修正量 $(\delta \mathbf{E}^{(i)} + \nabla_y^{(s)} \delta \mathbf{u}^{(F)})$ に対応するミクロ応力の増分 $\delta \boldsymbol{\tau}^{(F)}$ が次のように定義できる。

$$\delta \boldsymbol{\tau}^{(F)} = \mathbf{c} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^{(F)}) \delta \mathbf{E}^{kh} \quad (2.61)$$

よって、これに対応するマクロ応力増分 $\delta \mathbf{T}^{(F)}$ はミクロ応力増分の平均として次のように表される。

$$\delta \mathbf{T}^{(F)} = \frac{1}{|Y_{t_n}|} \int_{Y_{t_n}} \delta \boldsymbol{\tau}^{(F)} dy = \left[\frac{1}{|Y_{t_n}|} \int_{Y_{t_n}} \mathbf{c} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^{(F)}) dy \right] \delta E^{kh} \quad (2.62)$$

これにより、マクロ接線係数は次式のように近似される。

$$\mathbf{A}_{t_n}^{(i)} := \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \mathbf{E}} \approx \frac{\delta \mathbf{T}^{(F)}}{\delta \mathbf{E}^{(F)}} = \frac{1}{|Y_{t_n}|} \int_{Y_{t_n}} \mathbf{c} : (\mathbf{I}^{kh} - \nabla_y^{(s)} \chi_{kh}^{(F)}) dy \quad (2.63)$$

2.2.4 解析アルゴリズム

本節では、前節までの定式化に沿って、濃度場と変位場の弱連成マルチスケール・マルチフィジックス解析アルゴリズムを提示する。

本研究では、濃度場と変位場の連成問題に対して、均質化法や非線形問題へのインプリメンテーションの容易性を考慮し、各々の支配方程式を独立に連成させる弱連成解法を採用する。このため、物質拡散解析からある微小時間内の濃度変化を算出したのちに、同時時間内における固体変形解析を行うという手順を踏む。以下では、ある時刻 $t = t_n$ において濃度場と変形場が共に平衡状態にあり、微小時間 Δt 後の時刻 $t = t_{n+1}$ での平衡状態を求める際の解析手順を示し、対応する解析フローを図-2.2 に与えておく。

- (1) $t = t_n$ における微視的非均質性および微視的ひび割れを考慮した拡散係数を算出する。
- (2) $[t_n, t_{n+1}]$ におけるマルチスケール物質拡散解析を行い、濃度変化を算出する。
- (3) 算出された $[t_n, t_{n+1}]$ における濃度変化を受けて生ずる微視的ひび割れ、ならびに微視的非均質性を考慮した弾性係数を算出し、マルチスケール固体変形解析を行う。この際、内力変化に伴う新たな微視的ひび割れの発生の有無を調べ、Newton-Raphson 法によりつり合い状態が得られるまでミクロ・マクロ連成非線形解析を繰り返す。
- (4) 変形状態および微視的ひび割れ進行の更新を行い、次の時間ステップ $[t_{n+1}, t_{n+2}]$ に移行させる。

以上の解析手順により、微視的な損傷を考慮した巨視的力学特性の経時的な劣化、およびそれに伴う物質移動の促進過程を評価することができる。

2.3 ミクロ損傷解析のためのボクセル解析法

2.3.1 ミクロスケールの解析手法

コンクリートのような非均質材料のマルチスケール解析を実践するには、複雑な幾何性状を有するミクロ構造（ユニットセル）をモデル化する必要がある、通常の

FEMを用いることを考えるとそのモデル化・メッシュ生成に多大な労力を要することとなる．また，コンクリートに代表的な環境劣化を対象とする場合には，非均質脆性材料のひび割れによる力学的な損傷，および損傷による物質拡散特性の変化を評価可能な解析手法の適用が望まれる．

そこで本研究では，画像データや3D-CADデータから微小立方体（正方形）有限要素の集合により，複雑な幾何形状を近似的（階段状）にモデル化可能なボクセル有限要素法[17]の適用を図る．しかしながら，一般的なボクセル有限要素法を非均質材料の解析に適用すると，幾何形状の階段状近似により人工的な応力振動が発生することが知られており，そのままでは損傷の解析に適用することができない．この応力振動問題に対して，文献[18]では，非局所理論[19]をボクセル有限要素法と組み合わせることにより，応力振動の回避および要素寸法に依存しない破壊挙動解析への有効性が示されている．本研究においても，文献[18]と同様のボクセル解析法を用いて，力学的な損傷および損傷による物質拡散特性の変化に関するマルチフィジックスを解析することとする．

2.3.2 修正ボクセル有限要素法

2.3.2.1 積分平均化理論の導入

文献[18]と同様，ボクセル有限要素法に特有の応力振動を軽減させるために，非局所理論の中の積分平均化理論[19]に着目する．これは，ボクセル有限要素法を用いた場合，材料界面において顕著な解析誤差を生じるが，その他の領域では適切な有限要素近似が行えることを考え，材料界面での応力をその周囲の適切な近似結果から非局所量として推測することを意図したものである[18]．図-2.3に示されるように，非局所量の推測の際には，被推測点を中心とする影響半径内の領域を考え，次式に示すBell型重み関数を用いて周囲の影響を加味する際の強弱を決定する．

$$\alpha(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{if } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{if } R \leq r \end{cases} \quad (2.64)$$

ここで， R は周囲の影響を考慮する際の被推測点から測られる影響半径であり， r は被推測点から測られる周囲の点までの距離である．本研究では，固体変形問題に対してのみ，この非局所理論を適用することとし，非局所ひずみ $\bar{\epsilon}$ と非局所応力 $\bar{\sigma}$ は次式により評価する．

$$\bar{\epsilon} = \int_S \alpha(r) \epsilon(r) ds \quad (2.65)$$

$$\bar{\sigma} = c : \bar{\epsilon} \quad (2.66)$$

ここで， s は影響範囲内の領域， ϵ は通常のボクセル有限要素法から得られるひずみである．

2.3.2.2 損傷によるマルチフィジックス解析

ボクセル有限要素法を用いて、複数のひび割れが任意方向に進展する現象を再現するために、本研究では剛性劣化手法[20]を採用する。これは、ある破壊基準を満たした要素の剛性を劣化または消失させる手法であり、本研究では、図-4.5に示されるように、定型かつ微小なボクセル要素のモデル化と組み合わせることにより、近似的にひび割れを表現する。そして、ミクロ構造の損傷を表現するための破壊基準としては、引っ張り破壊のみを考慮する古典的な Rankine 破壊基準を採用する。すなわち、図-4.5に示されるように、要素中心での最大主応力が応力空間の破壊包絡線外にある要素は破壊したと見なし、要素の剛性を劣化させる。

近似的なひび割れのモデル化により力学的な損傷を表現すると同時に、本研究では、物質拡散特性の変化をマルチフィジックスとして評価する。具体的には、コンクリートに見られるような、劣化により物質拡散性が向上するといった現象を模擬して、ひび割れの近似表現に適用した剛性劣化手法と同様に拡散特性を向上させる。なお、損傷による剛性の劣化および拡散特性の向上は、ともに瞬時に発生するものと仮定する。

2.4 数値解析例

2.4.1 解析ステップ数に関する検証例題

はじめに、本研究で開発したマルチスケール・マルチフィジックス解析手法が弱連成解法を採用したこと、およびマクロ拡散係数の陽的近似を仮定したことに関連して、解析ステップ数の相違が解析結果に与える影響を検討しておく。なお、本解析における解析ステップは、非定常拡散問題の時間ステップと同義である。

図-2.5に示されるように、円形介在物を有するミクロ構造で構成される非均質体を想定し、マクロ構造は1要素でモデル化する。平面ひずみ状態を仮定し、マクロ構造に対して一様に濃度 3 kg/m^3 を、50 ステップ、100 ステップ、300 ステップの3通りで与える。母材と介在物の材料パラメータは、同図(b)に示される通りとし、介在物のみが濃度 0.5 kg/m^3 を超えると濃度変化に比例して膨張すると仮定して、その膨張応力を $\beta_1 = 50 \text{ MPa}$ と設定する。また、母材のみが損傷すると仮定し、その破壊基準を最大主応力 10 MPa とする。

解析結果として、各解析ステップ数によるミクロ構造の損傷分布の相違を図-2.6に示す。ステップ数50ではステップ数100と300の結果と比較して若干異なった分布となっているが、3ケースともに定性的にはほぼ同じような損傷分布が得られており、解析ステップ数によって大きく解析結果が変化しないことを例示している。

次に、3ケースの各時間ステップにおけるマクロ弾性（接線）係数（式(2.63)参照）の履歴を図-2.7に示す。前の結果と同様にステップ数50のみ若干異なった経路をたどっているが、最終的に得られる状態はほとんど同じであり、この関係からも本解析手法がステップ数に大きく依存しないことが分かる。また、マクロ拡散係数についても同様の結果であった。

以上の数値実験結果から、濃度場と変形場の弱連成解析法を適用し、Newton-Raphson 法による収束計算により固体の変形や損傷を評価する本解析手法では、解析ステップ数に大きく依存しない結果が得られることが例証された。これは、時間方向の離散化の安定性を保証するものであり、年月の経過に伴うミクロ構造の損傷やマクロ物性変化を評価するに当たっての必須の性能である。

2.4.2 定常状態の1要素数値実験

図-2.8に示されるように、円形介在物を有するミクロ構造で構成される非均質体を対象とし、死荷重に相当する力学的境界条件の異なる2ケースを設定する。本例題では、両者の初期状態における応力状態が同じになるように、変位境界を与えるケースの強制変位の値を調節しており、ともに定常状態を250ステップで解析するものとする。マクロ要素は1要素でモデル化し、平面ひずみ状態を仮定する。母材と介在物の材料パラメータは、同図(c)に示される通りとし、介在物のみが濃度 0.5 kg/m^3 を超えると濃度変化に比例して膨張すると仮定して、その膨張応力を $\beta_I = 50 \text{ MPa}$ と設定する。また、母材のみが損傷すると仮定し、その破壊基準を最大主応力 10 MPa とする。

解析結果として、はじめにそれぞれのケースに対する時間ステップにおける von-Mises 応力分布とひび割れ損傷分布を図-2.9に示す。この図に示されるように、両者は異なる損傷分布となっており、荷重境界モデルの場合はマクロ構造上端の変形が拘束されないので、ひび割れは鉛直方向・水平方向ともに進展していく様子が再現されている。一方、変位境界モデルの場合はマクロ構造上端の変形が拘束されるので、主に鉛直方向にのみ損傷が進展していく様子が再現されている。また、応力分布においても拘束の厳しい変位境界モデルの方が、高い応力値を示していることが分かる。このように、両者ともに物理的および経験的な考察と一致した結果が得られており、本数値解析手法の妥当性・有効性が示されている。

次に、各時間ステップにおける x_1 方向および x_2 方向のマクロ弾性係数の履歴を図-2.10と図-2.11に、また各時間ステップにおける x_1 方向および x_2 方向のマクロ拡散係数の履歴を図-2.12と図-2.13に示す。ここで、これらの結果は各時間ステップのつり合い状態において、式(2.63)のマクロ弾性（接線）係数と式(2.12)のマクロ拡散係数により算出した結果である。これらの図に示されるように、時間の経過とともにミクロスケールのひび割れ進展の影響によって、マクロな弾性係数は減少していき、同時にマクロな拡散係数は増加していく結果が再現されている。これは、コンクリート構造物の環境劣化に代表される現象と同様であり、本研究で構築したマルチスケール・マルチフィジックス解析手法が有効性を例示している。また、荷重境界モデルでは、時間ステップ(100/250)付近において x_1 方向にもひび割れが進展するので、 x_2 方向の弾性係数(図-2.11)と x_1 方向と拡散係数(図-2.12)の変化が、変位境界モデルの結果と比較して顕著に表れている。このように、提案するマルチスケール・マルチフィジックス解析手法は、構造物のミクロな非均質性や使用環境あるいは境界条件の影響を考慮した評価、また年月の経過に伴うマクロ物性

の変化の評価を可能としている。

2.4.3 経年劣化の非定常解析

図-2.14 に示されるような円形介在物を有する非均質構造体に対して，経年劣化の非定常数値解析例を示す．解析条件は，マクロ構造の上下端に力学的境界条件を与えるものとし，左右端に物質流束を与えて初期濃度を 0 kg/m^3 として，40 年間に對する経年的な材料劣化を解析する．ミクロ構造およびマクロ構造のメッシュ分割は同図に示される通りとし，母材と介在物の材料パラメータや損傷パラメータは前の例題と同じものを用いるが，構造物全体の挙動を解析するために拡散係数のみを 100 倍に設定した．

解析結果として，マクロスケールの濃度・変形・応力分布とミクロスケールの応力・損傷ひび割れ分布を図-2.15 に示す．この図に示されるように，時間（年月）の経過に伴って境界から中央に向かって徐々にミクロ構造の劣化が進行していく様子がシミュレートされている．本例題では，物質の流入および膨張変形が境界から順に起こるので，境界付近の D 点では等方的な変形が早期に卓越することから等方的なひび割れ分布が得られている．また，中央付近の E 点では境界から起こる変形によってせん断の影響を反映したひび割れ分布が得られるなど，損傷の形態もマクロ変形に対応したものとなっている．

次に，図-2.15 で示したマクロスケールの 2 点（図中の D 点と E 点）での平均的なマクロ弾性係数とマクロ拡散係数の履歴を図-2.16～図-2.19 に示す．これらの図に示されるように，本評価手法においては，ミクロ・マクロスケールでの構造特性や境界条件を反映した，マクロ構造の各点での経年的な変形特性および拡散特性の変化の過程を追跡できることが分かる．また，40 年後のマクロ構造における図-2.14 の A-B 区間の濃度分布を図-2.20 に示す．同図には，参考としてミクロスケールでの損傷を考慮しない線形解析の結果を合わせて表示している．この関係に示されるように，本研究で開発したマルチスケール・マルチフィジックス解析手法は，ミクロ構造の損傷による非線形解析を考慮したことにより，損傷が進むにつれて拡散が促進し濃度分布が高くなるといった妥当な結果が得られている．

以上の数値解析結果を総括すると，本研究では均質化法を用いてマルチスケール・マルチフィジックス問題に対する解析手法を構築したことにより，図-2.15 のようにミクロ・マクロの両スケールの挙動を可視化でき，さらには図-2.16～図-2.20 のようにマクロ構造の各点におけるミクロスケールでの構造的な損傷を反映した平均的な材料劣化を評価することができる．

2.5 おわりに

本研究では，コンクリート構造物に見られる環境劣化現象の数値シミュレーション技術の開発を意図して，均質化法を用いた物質拡散問題と固体変形問題の弱連成マルチスケール・マルチフィジックス問題の定式化を行った．加えて，脆性的なひび

割れによる損傷を近似的に表現するための修正型のボクセル解析法をミクロスケールの解析に適用し、経年的な損傷および劣化を解析するための数値シミュレーション技術を構築した。そして最後に、数値解析例において経年劣化の再現を試み、本研究で構築した弱連成マルチスケール・マルチフィジックス解析手法の妥当性や有効性を例示した。

参考文献

- [1] Babuška, I. : Homogenization and its application. Mathematical and computational problems, *Numerical solution of partial differential equations III*, Academic Press, New York, pp.89–115, 1976.
- [2] 寺田 賢二郎, 菊池 昇 : 計算力学レクチャーシリーズ①, 均質化法入門, 丸善, 2003.
- [3] Terada, K., Kikuchi, N. : A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogenous media, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.5427–5464, 2001.
- [4] Yi, Y., Park, S., Youn, S. : Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.35, pp.2039–2055, 1998.
- [5] Terada, K., Ito, T., Kikuchi, N. : Charactrization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.153, pp.223–257, 1998.
- [6] Kamiński, M. : Homogenization of transient heat transfer problems for some composite materials, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.41, pp.1–29, 2003.
- [7] Yu, Q., Fish, J. : Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales: a coupled thermo-viscoelastic example problem, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.39, pp.6429–6452, 2002.
- [8] 富山 潤, 伊良波 繁雄, 山田義智, 入部綱清 : ボクセル解析によるセメントの水和熱に起因したコンクリートの温度応力解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, pp.585–590, 2004.
- [9] 野城良祐, 石川靖晃, 中村 光, 田邊忠顕 : 物質移動を考慮したRBSMによるひび割れ進展解析法の開発, コンクリート工学年次論文集, Vol.25, pp.467–472, 2003.
- [10] 小澤泰士, 斉藤成彦, 檜貝 勇 : 3次元剛体バネモデルによるコンクリートの収縮ひび割れ解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, pp.477–482, 2004.

- [11] Maekawa, K., Ishida, T., Kishi, T. : Multi-scale Modeling of Concrete Performance — Integrated Material and Structural Mechanics, *Journal of Advanced Concrete Technology*, Vol.1, pp.91–126, 2003.
- [12] 石田哲也, 前川宏一 : 物質・エネルギーの生成・移動と変形・応力場に関する連成解析システム, 土木学会論文集, No.627/V-44, pp.13–25, 1999.
- [13] Gawin, D., Majorana, C.E., Schrefler, B.A. : Numerical analysis of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at high temperature, *Mech. Cohes.-Frict. Mater.*, Vol.4, pp.37–74, 1999.
- [14] Gawin, D., Pesavento, F., Schrefler, B.A. : Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.1731–1771, 2003.
- [15] Allaire, G. : Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol.23, pp.1482–1518, 1992.
- [16] Sanchez-Pelencia, E. : Nonhomogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Notes in Physics* 127 (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- [17] Hollister, S.J., Kikuchi, N. : Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotech. Bioengrg.*, Vol.43, pp.586–596, 1994.
- [18] 浅井光輝, 山岸道弘, 寺田賢二郎, 永井学志 : 非局所ボクセル有限要素法の開発とその破壊挙動解析への適用, 土木学会論文集, No.759/I-67, pp.233–245, 2004.
- [19] Bažant, Z.P., Pijaudier-Cabot, G. : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *J. Appl. Mech.*, Vol.55, pp.287–293, 1988.
- [20] Mahishi, J.M., Adams, D.F. : Micromechanical Predictions of Crack Initiation, Propagation and Crack Growth Resistance in Boron/Aluminum Composites, *J. Comp. Mat.*, Vol.16, pp.457–469, 1982.

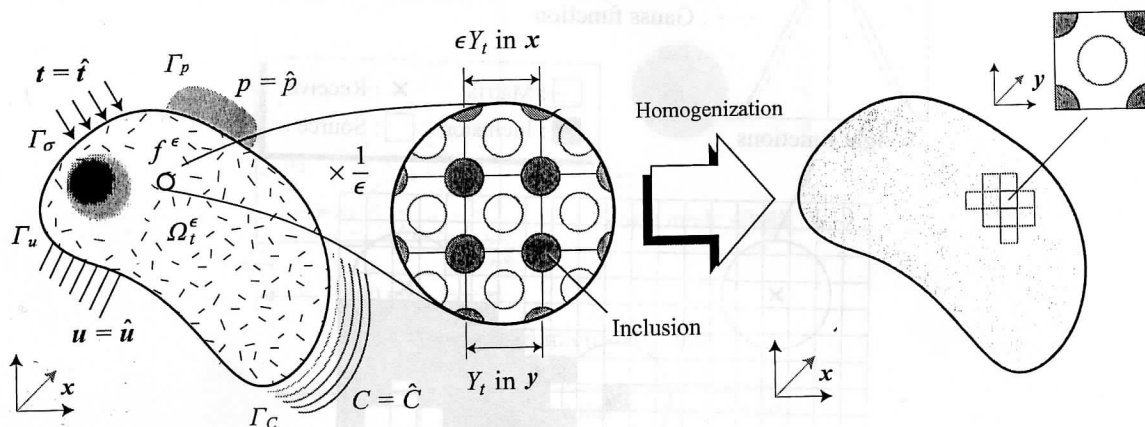


図-2.1 均質化法に基づく拡散と変形のマルチスケール・マルチフィジックス問題

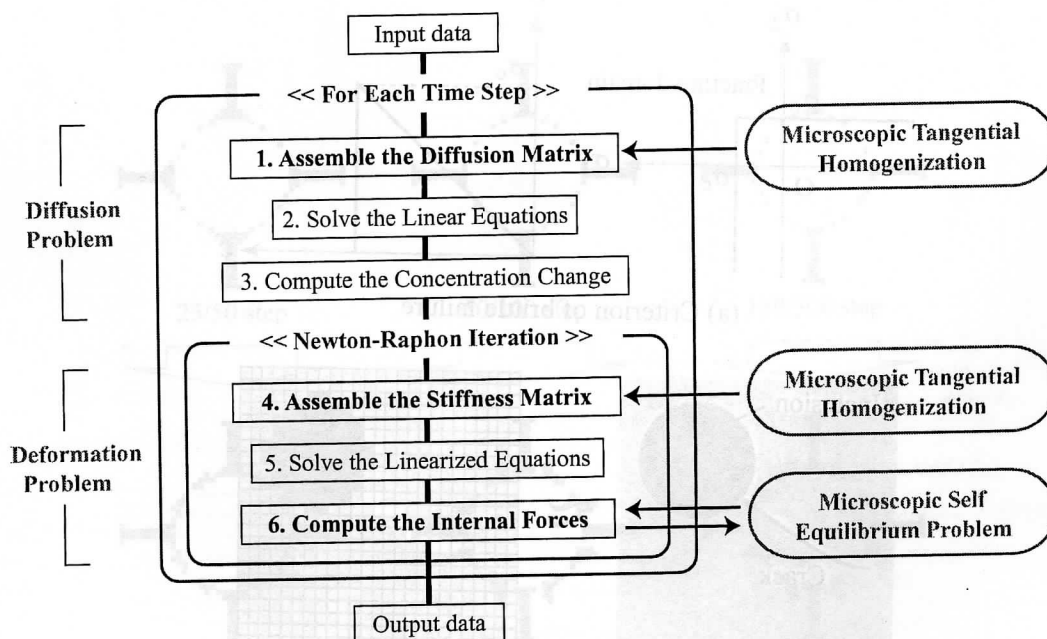


図-2.2 濃度場と変位場の弱連成マルチスケール・マルチフィジックス解析手順

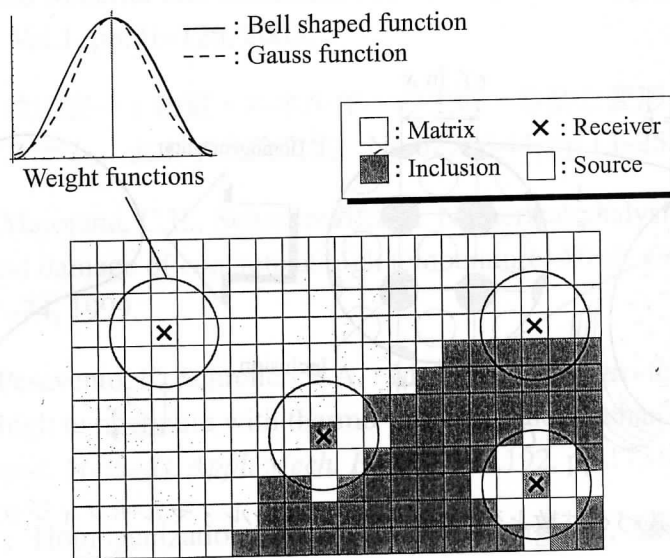
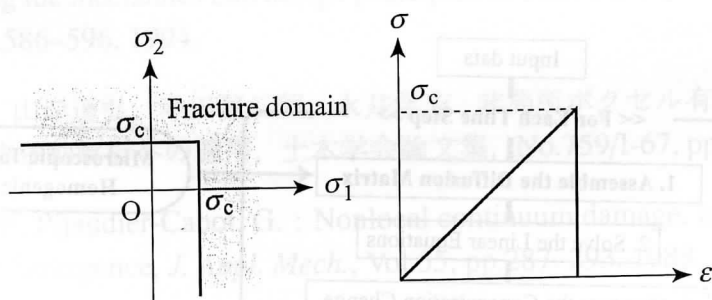
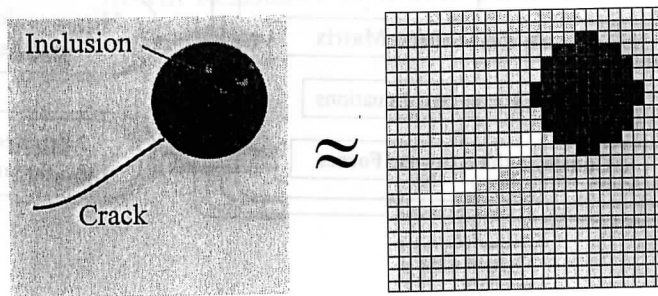


図-2.3 非局所量の算定に関する詳細

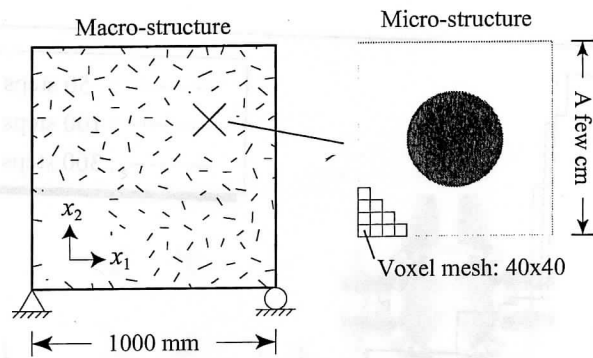


(a) Criterion of brittle failure



(b) Voxel representation of crack path

図-2.4 ボクセル解析によるひび割れ表現法



(a) Macro- and micro-structure

	Young's modulus	Poisson's ratio
Matrix	20000 MPa	0.20
Inclusion	50000 MPa	0.20

(b) Material parameters

図-2.5 検証に用いる解析モデル

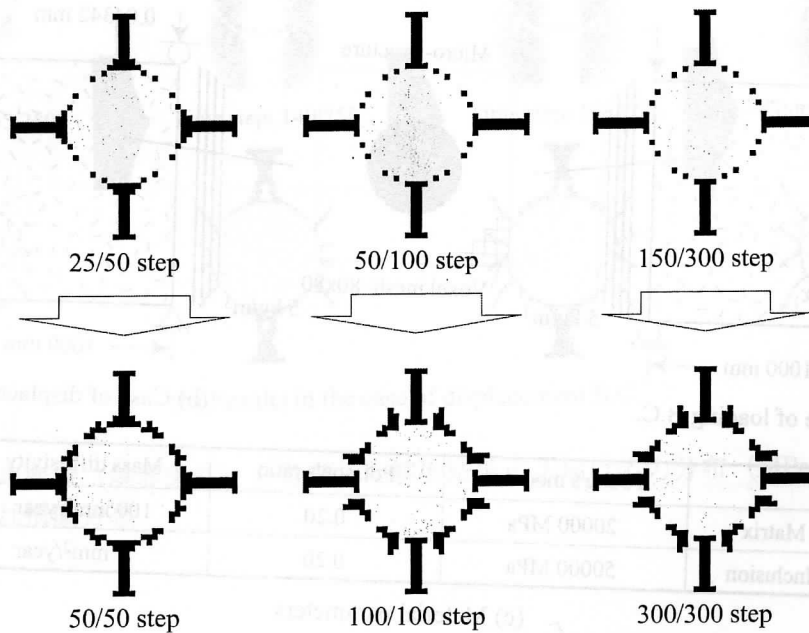


図-2.6 異なる解析ステップ数による損傷分布の相違

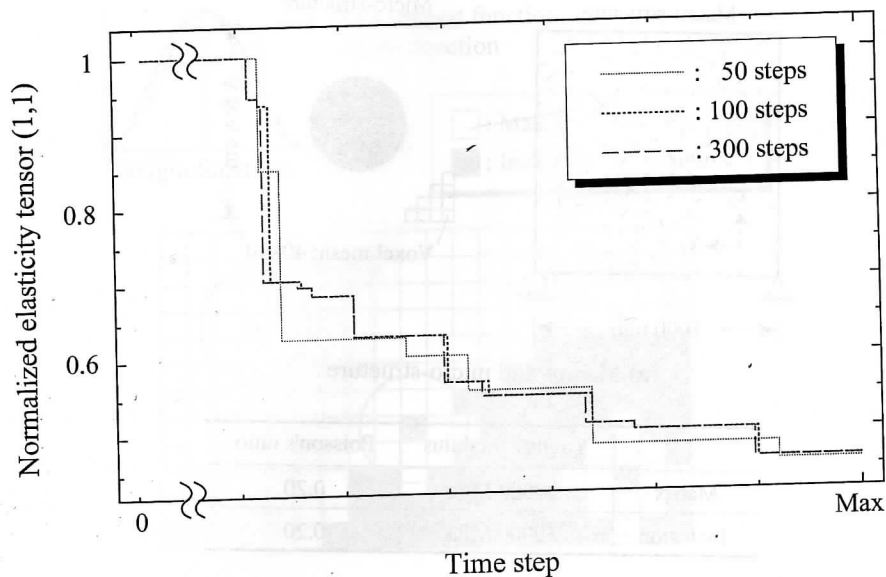
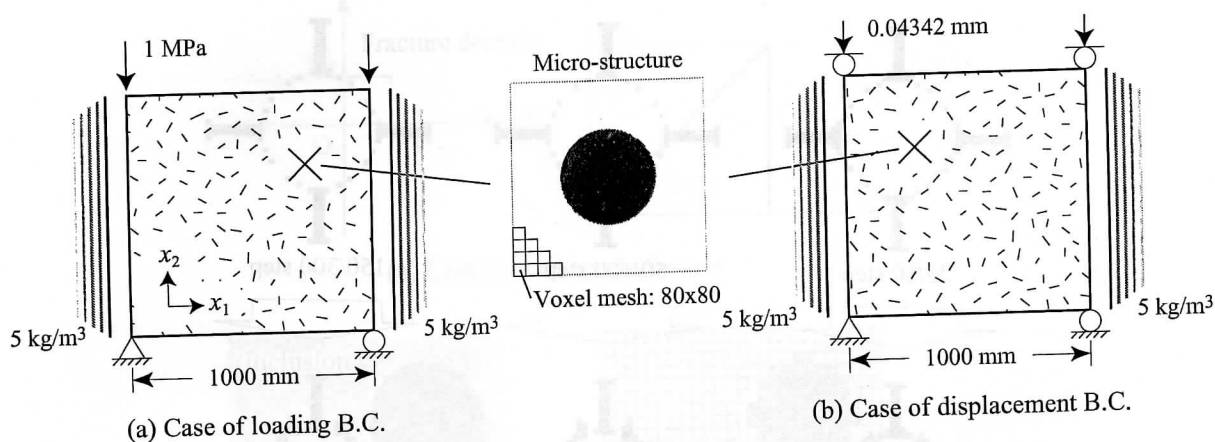


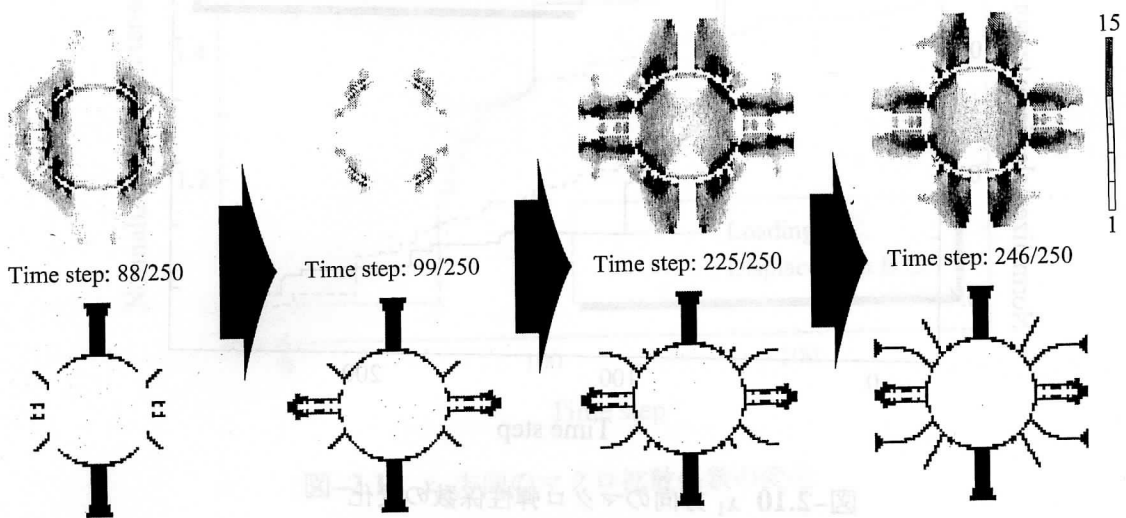
図-2.7 異なる解析ステップ数によるマクロ物性の相違



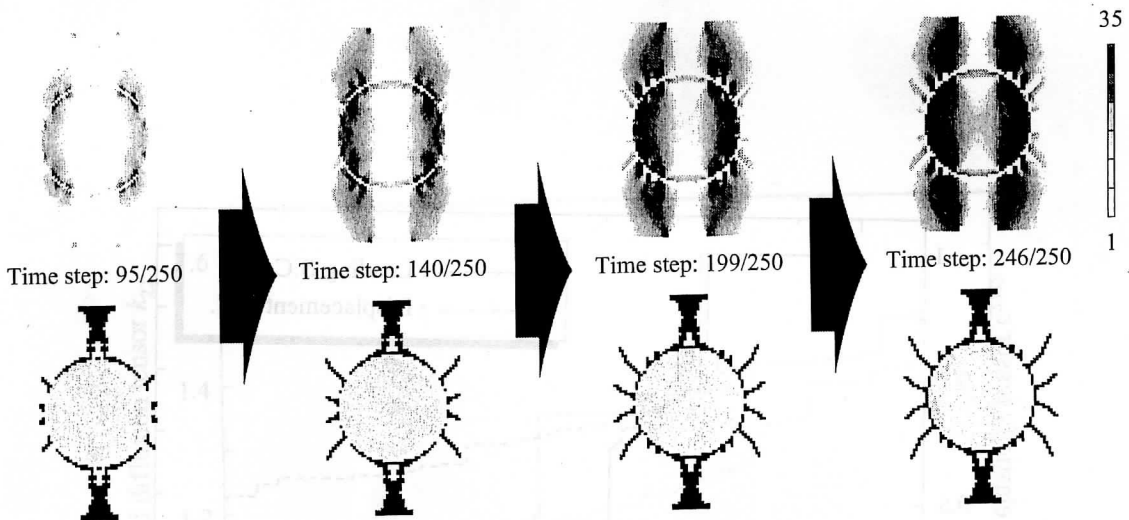
	Young's modulus	Poisson's ratio	Mass diffusivity
Matrix	20000 MPa	0.20	100 mm ² /year
Inclusion	50000 MPa	0.20	1 mm ² /year

(c) Material parameters

図-2.8 力学的境界条件の異なる1要素のマクロ構造に対する定常状態解析モデル



(a) Results in the case of loading B.C.



(b) Results in the case of displacement B.C.

図-2.9 使用環境（境界条件）を考慮した解析結果：上段は応力分布（MPa），下段はひび割れ損傷分布

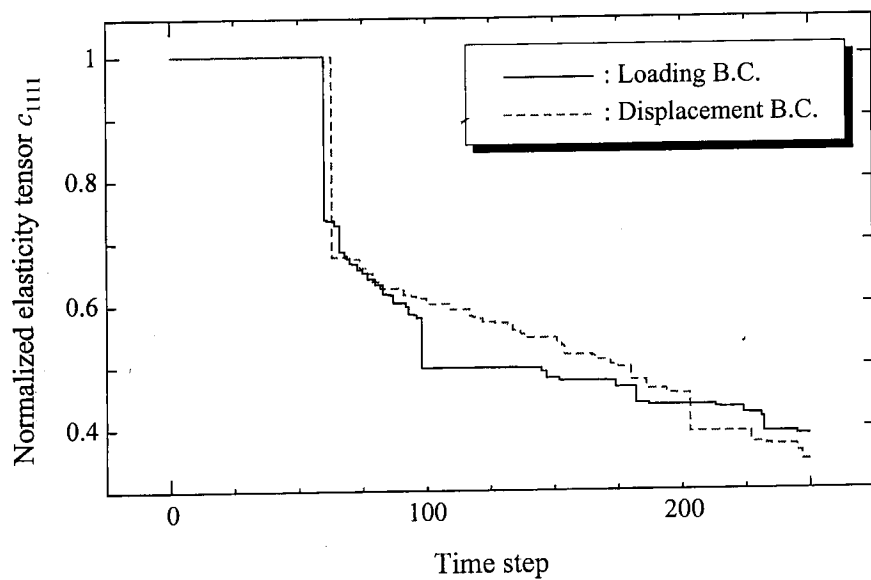


図-2.10 x_1 方向のマクロ弾性係数の変化

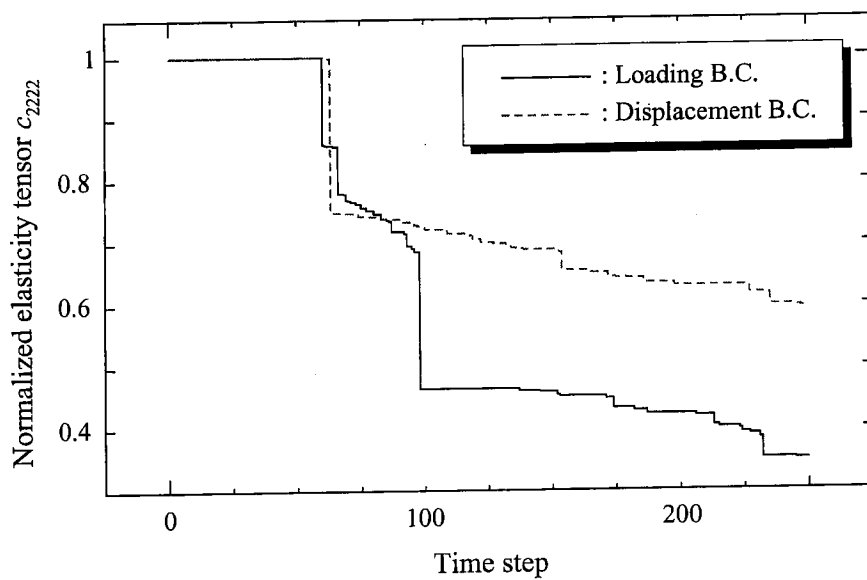


図-2.11 x_2 方向のマクロ弾性係数の変化

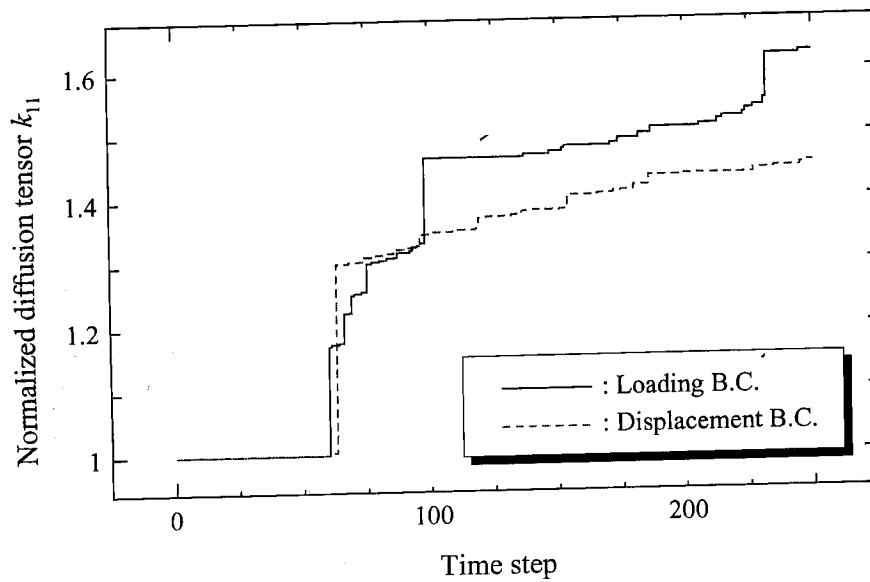


図-2.12 x_1 方向のマクロ拡散係数の変化

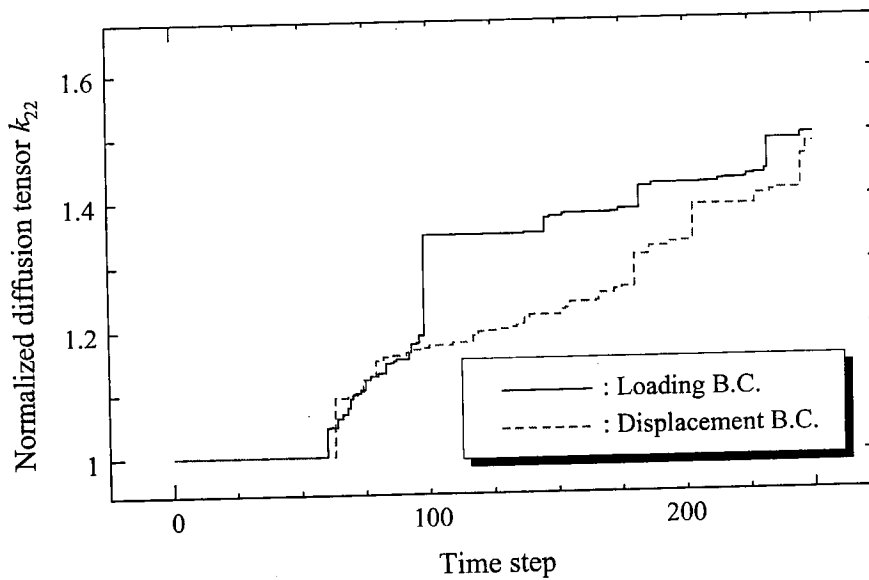


図-2.13 x_2 方向のマクロ拡散係数の変化

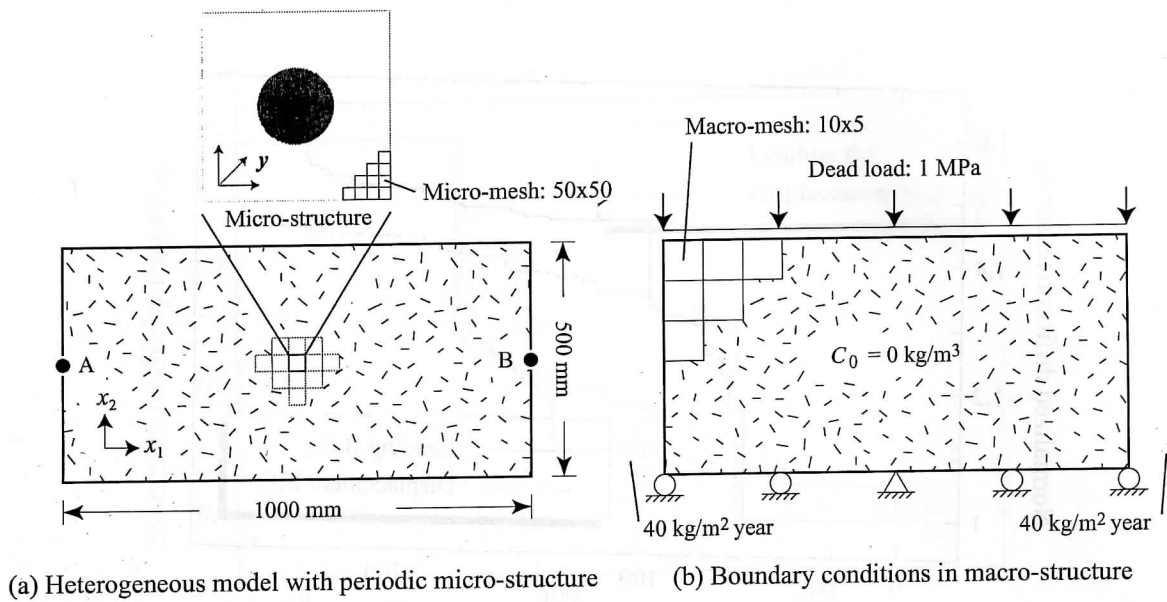


図-2.14 死荷重と物質流束を受ける非定常解析モデル

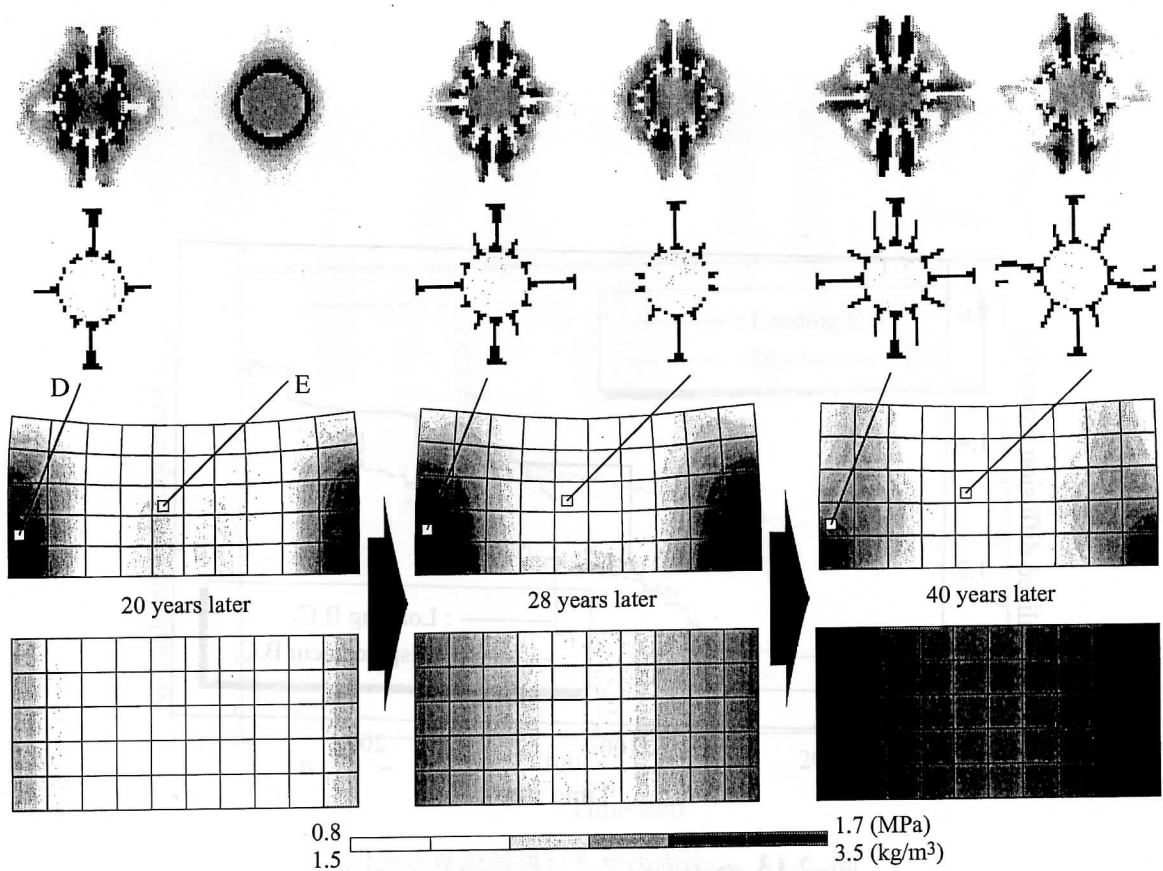


図-2.15 非定常解析結果：マクロ応答は変形 (×10)・応力分布と濃度分布，ミクロ応答は応力分布とひび割れ損傷分布

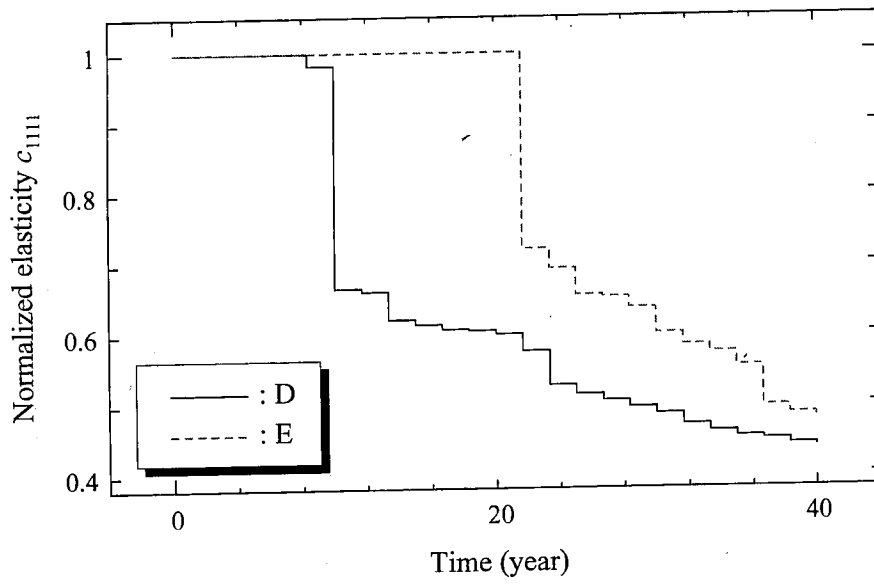


図-2.16 D点とE点での x_1 方向マクロ弾性係数の変化

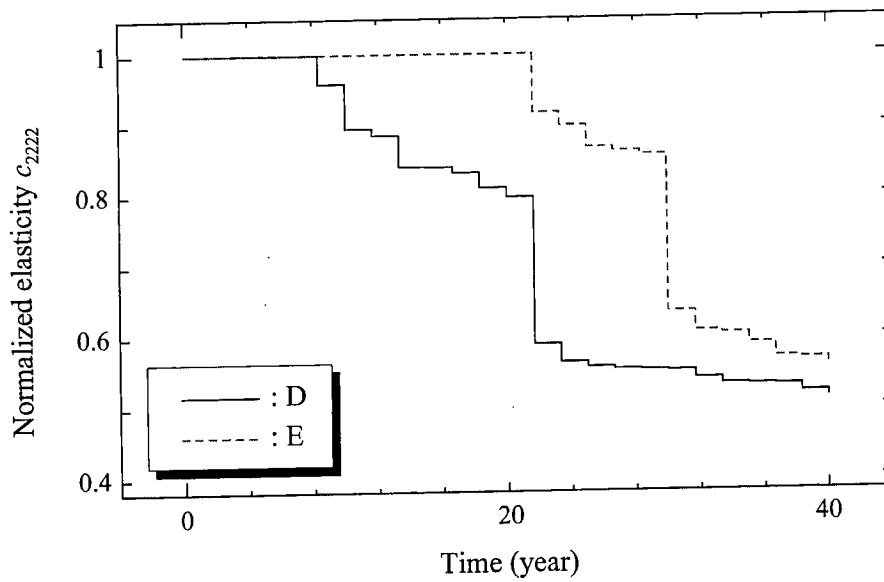


図-2.17 D点とE点での x_2 方向マクロ弾性係数の変化

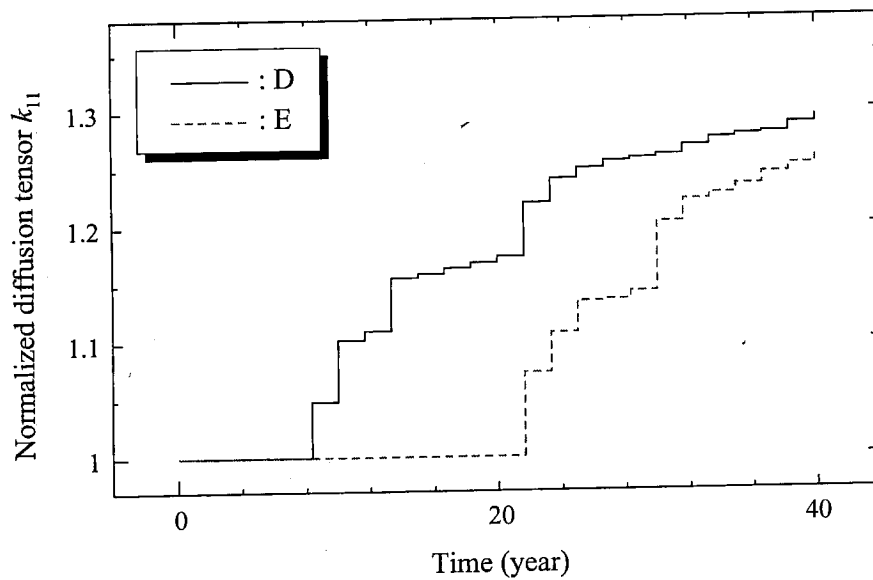


図-2.18 D点とE点での x_1 方向マクロ拡散係数の変化

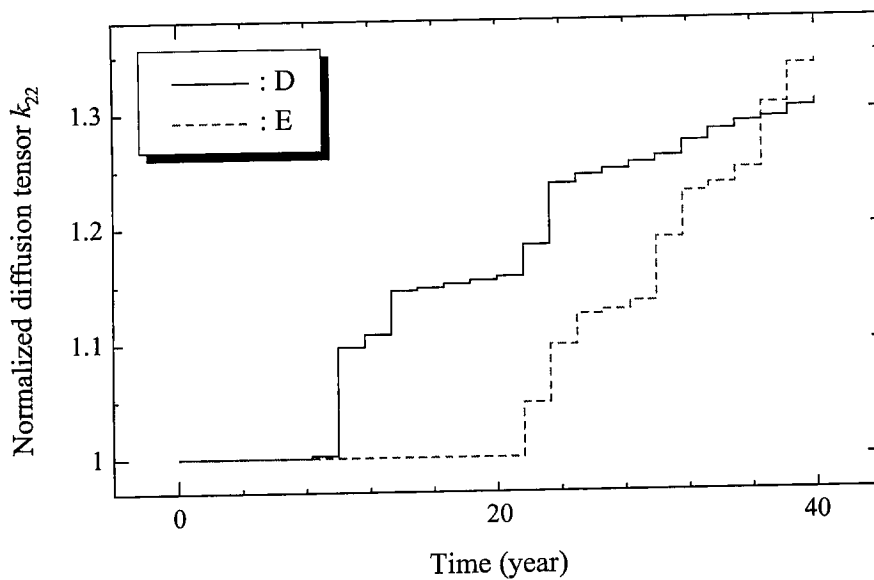


図-2.19 D点とE点での x_2 方向マクロ拡散係数の変化

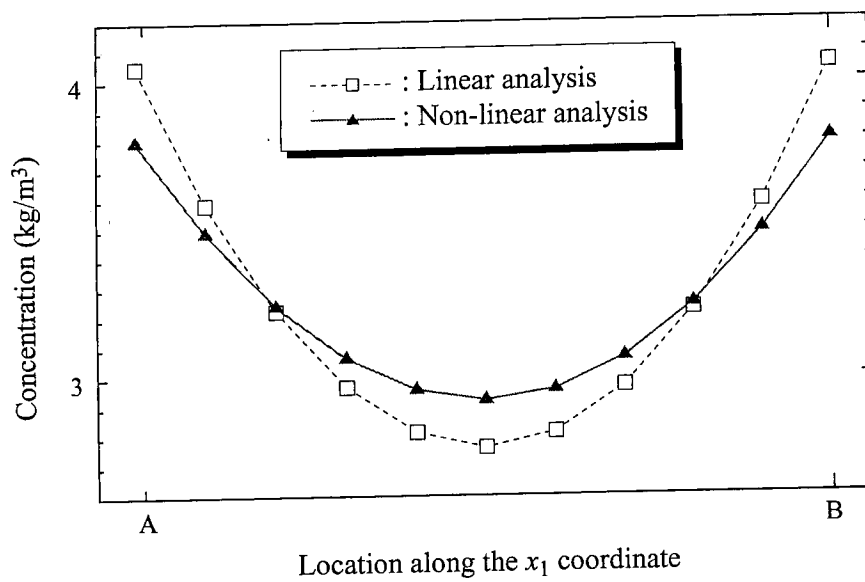


図-2.20 40年後における x_1 軸方向の濃度分布の比較

第3章 多孔質体微視領域での熱伝達を 考慮した均質化法に基づくマル チスケール熱伝導解析

3.1 はじめに

高温環境下におけるセラミックスの熱膨張や、氷結温度環境下のコンクリートの凍結融解作用（凍害）に代表されるように、熱伝導（熱拡散）問題が対象とする材料は多孔質体の場合が多い。さらに、コンクリートに対しては、コンクリートが元来有する多孔質性、あるいは材料劣化に起因して生じた微細なひび割れ形成による巨視的な拡散特性の変化のモデル化が必要とされている [1]。

多孔質体においては、通常の方法とは異なり、マクロスケールの境界条件として与えられる熱伝達や熱流束に加えて、多孔質体内部の孔を通る気体や液体を介してのミクロスケールの熱伝達が発生し、これが多孔質体のマクロな熱伝導に影響を与えることになる。このような問題においては、多孔質体ミクロスケールにおける孔表面を通しての熱交換を評価する必要がある。多孔質体内部を流れる流体の解析と孔表面からの熱伝達による固体の熱伝導解析を実践しなければならない。しかしながら、前者は数値解析の枠組みが整備されているものの [2]、後者の多孔質体ミクロスケールにおける孔表面での内部熱伝達を考慮可能な固体の熱伝導解析の枠組みは確立されていない。

一方、近年の計算機支援の材料力学分野では、材料の微視的非均質性に着目した研究が盛んに行われており、特に均質化法 [3, 4] を用いたマルチスケール解析が注目を集めている。均質化法を用いることにより、材料のミクロおよびマクロスケールの関係を数学的にリンクさせることができ、物理問題を限定しないことから、力学問題 [5, 6] をはじめ、浸透流 [7, 8] や熱伝導問題 [9, 10, 11]、多重複合物理問題 [12] などに広く応用されている。しかしながら、前述した多孔質性に起因するミクロスケールの内部熱伝達あるいは熱交換を考慮した熱伝導問題の均質化法は定式化されておらず、これを考慮したマルチスケール熱伝導解析も未着手となっている。また、ミクロスケールでの熱伝達の影響やミクロ温度分布を評価する際は、力学分野の変形問題とは異なり、ミクロ構造の大きさや座標系に配慮した定式化が必要となる。

そこで本章では、多孔質体の加熱・冷却作用に対する流体・固体の熱交換問題や、多孔質性や微細ひび割れを有するコンクリートの拡散問題における固体の熱伝導解析手法に着目し、多孔質体ミクロスケールにおける孔表面での内部熱伝達を考慮した均質化法に基づくマルチスケール熱伝導解析手法を構築する。加えて、新たに定

式化した均質化法について、力学問題の均質化法とは異なる数学的および数値解析的特徴を整理する。以下では、まず、焦点であるミクロスケールにおける内部熱伝達を考慮した熱伝導問題の均質化法の定式化を示し、力学分野における変形問題の均質化法では見られないミクロ構造（代表体積要素；ユニットセル）の大きさや座標系の影響について考察する。次に、均質化法によるマルチスケール熱伝導解析の解析精度を検証し、ユニットセルの大きさや座標系の影響、および多孔質体ミクロスケールでの熱伝達の影響について考察する。そして最後に、多孔質体を対象とした実際的な3次元数値解析例を紹介し、本手法を用いたマルチスケール熱伝導解析の有効性を例示する。

3.2 多孔質性を考慮した熱拡散の2変数境界値問題

3.2.1 非均質体の支配方程式

なめらかな境界 Γ^ϵ を有する時刻 $t \in (0, t_{\text{end}}]$ での温度分布を $T^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ とするとき、移流・対流のない熱拡散（熱伝導）問題の支配方程式は次式で与えられる。

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}^\epsilon + f^\epsilon = c^\epsilon \rho^\epsilon \dot{T}^\epsilon \quad \text{in } \Omega_t^\epsilon \times (0, t_{\text{end}}] \quad (3.1)$$

ここで、 ∇ は微分オペレータ、 c^ϵ は比熱、 ρ^ϵ は密度、 f^ϵ は領域内部における熱源であり、また温度 T^ϵ は次式で与えられる熱拡散に関する構成方程式（フーリエの法則）によって熱流束 $\mathbf{q}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ と関係付けられている。

$$\mathbf{q}^\epsilon = -\mathbf{k}^\epsilon \nabla T^\epsilon \quad (3.2)$$

ここに、 $\mathbf{k}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ は正値対称な熱拡散係数テンソルである。

また、境界 Γ^ϵ では次の温度境界・熱流束境界・外部熱伝達境界の3つの境界条件が与えられるものとする。

$$T^\epsilon = \hat{T} \quad \text{on } \Gamma_T \times (0, t_{\text{end}}] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{q}^\epsilon \cdot \mathbf{n} = \hat{p} \quad \text{on } \Gamma_q \times (0, t_{\text{end}}] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{q}^\epsilon \cdot \mathbf{n} = k_\infty^\epsilon (T^\epsilon - \hat{T}_\infty) \quad \text{on } \Gamma_\infty \times (0, t_{\text{end}}] \quad (3.5)$$

ここで、 $\Gamma^\epsilon = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_\infty$ かつ $\Gamma_T \cap \Gamma_q \cap \Gamma_\infty = \emptyset$ であり、 \mathbf{n} は Γ_q あるいは Γ_∞ 上の外向き単位法線ベクトルである。また、 \hat{T} は境界 Γ_T に与えられる温度、 \hat{p} は境界 Γ_q を通して与えられる熱流束、 T_∞ 、 k_∞ は境界 Γ_∞ に与えられる外部温度と外部熱伝達係数である。また、次式のような初期条件を与える必要がある。

$$T^\epsilon = T_0 \quad \text{in } \Omega_t^\epsilon|_{t=0} \quad (3.6)$$

以上の支配方程式で記述される熱拡散現象の初期値・境界値問題は、 $\bar{T}^\epsilon(\mathbf{x}, t)$ を試験関数とする次の変分方程式（弱形式）と等価である。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\epsilon} c^\epsilon \rho^\epsilon \bar{T}^\epsilon \dot{T}^\epsilon d\Omega + \int_{\Omega^\epsilon} \nabla \bar{T}^\epsilon \cdot k^\epsilon \nabla T^\epsilon d\Omega + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty^\epsilon \bar{T}^\epsilon (T^\epsilon - \hat{T}_\infty) d\Gamma \\ = \int_{\Omega^\epsilon} \bar{T}^\epsilon f^\epsilon d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{T}^\epsilon \hat{p} d\Gamma \quad \forall \bar{T}^\epsilon, t \in (0, t_{\text{end}}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.2 多孔質体の孔やひび割れ表面を通して熱伝達がある場合

図-3.1 に示されるように微視領域内にひび割れを含む空隙領域 ϑ_i が存在すると仮定する。このとき、ユニットセル Y_i 内には空隙が存在することになり、これを開領域 ϑ_i と定義すると、空隙以外の固体部分 Y_i^ϑ は次のように表すことができる。

$$Y_i^\vartheta = Y \setminus \vartheta, \quad Y = Y_i^\vartheta \cup \vartheta_i \quad (3.8)$$

この空隙領域 ϑ_i は十分滑らかな境界 S_i を有し、ユニットセル Y_i の境界 ∂Y_i と交わることはないとする。また、外向き法線ベクトル ν を有する空隙境界 S_i の全体を S_i^ϵ と定義すれば、全境界は $\Gamma_i^\epsilon \cup S_i^\epsilon$ となり、空隙境界 S_i^ϵ では次の境界条件が与えられるものとする。

$$q^\epsilon \cdot \nu = k_s^\epsilon (T^\epsilon - \hat{T}_s) \quad \text{on } S_i^\epsilon \quad (3.9)$$

ここで、 \hat{T}_s はデータとして与えられる孔内温度、 k_s^ϵ は内部熱伝達係数である。以上の関係を踏まえると、式(3.7)で与えた弱形式は、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\epsilon} c^\epsilon \rho^\epsilon \bar{T}^\epsilon \dot{T}^\epsilon d\Omega + \int_{\Omega^\epsilon} \nabla \bar{T}^\epsilon \cdot k^\epsilon \nabla T^\epsilon d\Omega \\ + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty^\epsilon \bar{T}^\epsilon (T^\epsilon - \hat{T}_\infty) d\Gamma + \int_{S_i^\epsilon} k_s^\epsilon \bar{T}^\epsilon (T^\epsilon - \hat{T}_s) d\Gamma \\ = \int_{\Omega^\epsilon} \bar{T}^\epsilon f^\epsilon d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{T}^\epsilon \hat{p} d\Gamma \quad \forall \bar{T}^\epsilon, t \in (0, t_{\text{end}}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.3 漸近展開法に基づく定式化

本研究では、熱拡散の2変数境界値問題に対して漸近展開法に基づく定式化を採用する。温度場 T^ϵ およびその許容関数 \bar{T}^ϵ について、次式のような漸近展開形式の解を仮定する。

$$\begin{cases} T^\epsilon(x, y, t) = T^0(x, y, t) + \epsilon T^1(x, y, t) + \epsilon^2 T^2(x, y, t) + \cdots \\ \bar{T}^\epsilon(x, y, t) = \bar{T}^0(x, y, t) + \epsilon \bar{T}^1(x, y, t) + \epsilon^2 \bar{T}^2(x, y, t) + \cdots \end{cases} \quad (3.11)$$

ここで、 ϵ に関する各オーダーの温度 $T^i (i = 0, 1, \dots)$ は y に関して周期的 (Y-periodic) な関数である。また、座標系とユニットセルの関係は、 $y = x/\epsilon$ であり、微分に関する連鎖則は次の通りである。

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\Omega^\epsilon} = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\Omega} + \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_Y \quad \left(\nabla_x|_{\Omega^\epsilon} = \nabla_x|_{\Omega} + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y|_Y \right) \quad (3.12)$$

式(3.11)を式(3.10)に代入し、 ϵ^2 以上の高次項を無視すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\epsilon} c^\epsilon \rho^\epsilon (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (\dot{T}^0 + \epsilon \dot{T}^1) d\Omega \\
& + \int_{\Omega^\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla_y \bar{T}^0 + \nabla_x \bar{T}^0 + \nabla_y \bar{T}^1 + \epsilon \nabla_x \bar{T}^1 \right) \\
& \quad \cdot k^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla_y T^0 + \nabla_x T^0 + \nabla_y T^1 + \epsilon \nabla_x T^1 \right) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (T^0 + \epsilon T^1) d\Gamma + \int_{S^\epsilon} \epsilon k_S (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (T^0 + \epsilon T^1) d\Gamma \\
& = \int_{\Omega^\epsilon} (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) f^\epsilon d\Omega - \int_{\Gamma_q} (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{p} d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{T}_\infty d\Gamma + \int_{S^\epsilon} \epsilon k_S (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{T}_S d\Gamma \quad (3.13)
\end{aligned}$$

ここで、ユニットセル内の孔表面からの内部熱伝達係数は、その体積のオーダーと比較して次式のように仮定した.

$$k_S^\epsilon = \epsilon k_S \quad (3.14)$$

これは、ユニットセルの体積が無限小になっても孔表面の熱伝達の影響がセルの代表長さのオーダーで残ることを意味する. すなわち、ユニットセルが相似形で孔の体積率が同じであっても、セルの体積が小さいほど孔の表面積の寄与が大きくなって伝達性が増すことを期待するものである.

次に、極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとり、付録 A における積分公式 (A.1) と (A.2) を適用すれば、式(3.13)は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^\theta} c\rho (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (\dot{T}^0 + \epsilon \dot{T}^1) dydx \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^\theta} \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla_y \bar{T}^0 + \nabla_x \bar{T}^0 + \nabla_y \bar{T}^1 + \epsilon \nabla_x \bar{T}^1 \right) \\
& \quad \cdot k \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla_y T^0 + \nabla_x T^0 + \nabla_y T^1 + \epsilon \nabla_x T^1 \right) dydx \\
& + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (T^0 + \epsilon T^1) d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_S k_S (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) (T^0 + \epsilon T^1) d\Gamma dx \\
& = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^\theta} (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) f dydx - \int_{\Gamma_q} (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{p} d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Gamma_\infty} k_\infty (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{T}_\infty d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{S_t} k_S (\bar{T}^0 + \epsilon \bar{T}^1) \hat{T}_S d\Gamma dx \quad (3.15)
\end{aligned}$$

さらに、 ϵ に関する同一のオーダーについてまとめることにより次の式が得られる.

- ϵ^{-2} に関する式

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} \nabla_y \bar{T}^0 \cdot \mathbf{k} \nabla_y T^0 dy dx = 0 \quad (3.16)$$

• ϵ^{-1} に関する式

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} \left[\nabla_y \bar{T}^0 \cdot \mathbf{k} (\nabla_x T^0 + \nabla_y T^1) + (\nabla_x \bar{T}^0 + \nabla_y \bar{T}^1) \cdot \mathbf{k} \nabla_y T^0 \right] dy dx = 0 \quad (3.17)$$

• ϵ^0 に関する式

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} c \rho \bar{T}^0 \dot{T}^0 dy dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} \left[\nabla_y \bar{T}^0 \cdot \mathbf{k} \nabla_x T^1 + \nabla_x \bar{T}^1 \cdot \mathbf{k} \nabla_y T^0 \right. \\ & \quad \left. + (\nabla_x \bar{T}^0 + \nabla_y \bar{T}^1) \cdot \mathbf{k} (\nabla_x T^0 + \nabla_y T^1) \right] dy dx \\ & + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 T^0 d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_S k_S \bar{T}^0 T^0 d\Gamma dx \\ & = \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} \bar{T}^0 f dy dx - \int_{\Gamma_q} \bar{T}^0 \hat{p} d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 \hat{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{S_t} k_S \bar{T}^0 \hat{T}_S d\Gamma dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

次に、各 ϵ のオーダーの式について考察する。まず、 ϵ^{-2} のオーダーの式 (3.16) は次式を意味する。

$$T^0 = T^0(\mathbf{x}, t) \quad (\text{および } \bar{T}^0 = \bar{T}^0(\mathbf{x}, t)) \quad (3.19)$$

これにより、 ϵ^{-1} のオーダーの式 (3.17) は自動的に成り立つことが分かる。また、式 (3.19) を用いると、 ϵ^0 のオーダーの式 (3.18) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} R_t^H \bar{T}^0 \dot{T}^0 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} (\nabla_x \bar{T}^0 + \nabla_y \bar{T}^1) \cdot \mathbf{k} (\nabla_x T^0 + \nabla_y T^1) dy dx \\ & + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 T^0 d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 T^0 dx \\ & = \int_{\Omega} f_t^H \bar{T}^0 dx - \int_{\Gamma_q} \hat{p} \bar{T}^0 d\Gamma + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 \hat{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 \hat{T}_S dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで、 R_t^H は単位体積当たりの均質化熱容量、 $k_{S_t}^H$ は均質化内部熱伝達係数、 f_t^H は均質化熱源とし、それぞれ次式のように置き換えた。

$$R_t^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} c \rho dy \quad (3.21)$$

$$k_{S_t}^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{S_t} k_S d\Gamma \quad (3.22)$$

$$f_t^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^{\partial}} f dy \quad (3.23)$$

さらに、式(3.20)における任意の \bar{T}^1 について $\bar{T}^1 = \bar{T}^0(\mathbf{x}, t)$ をとると、次のマクロスケールの支配方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} R_t^H \bar{T}^0 \dot{T}^0 dx + \int_{\Omega} \nabla_x \bar{T}^0 \cdot \frac{1}{|Y|} \int_{Y_t^0} k (\nabla_x T^0 + \nabla_y T^1) dy dx \\
& \quad + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 T^0 d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 T^0 dx \\
& = \int_{\Omega} f_t^H \bar{T}^0 dx - \int_{\Gamma_q} \hat{p} \bar{T}^0 d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 \hat{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 \hat{T}_S dx \quad \forall \bar{T}^0, t \in (0, t_{\text{end}}] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

これを式(3.20)に戻すと、ミクロスケールの支配方程式が次のように表される。

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_{Y_t^0} \nabla_y \bar{T}^1 \cdot k (\nabla_x T^0 + \nabla_y T^1) dy dx = 0 \quad \forall \bar{T}^1, t \in (0, t_{\text{end}}] \quad (3.25)$$

以上より得られた弱形式(3.24)と(3.25)が、2変数境界値問題におけるマクロおよびミクロスケールの支配方程式である。ここで、ユニットセルの温度関数を $z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ とすると、これらの式は次に示すユニットセルの温度勾配によって関係付けられる。

$$\nabla_y z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \nabla_x T^0(\mathbf{x}, t) + \nabla_y T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (3.26)$$

マクロスケールの弱形式(3.24)は、ミクロ変数 $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を既知として $T^0(\mathbf{x}, t)$ を求める問題であり、またミクロスケールの弱形式(3.25)は、マクロ変数 $T^0(\mathbf{x}, t)$ を既知として $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を求める問題である。

3.2.4 ミクロからマクロへの均質化

弱形式(3.24)と(3.25)は、各々の変数が完全に連成した問題となっているが、線形な熱拡散問題を設定することによりミクロとマクロの連成を緩和することができる。

まず、ミクロスケールの温度 $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ が次式のようにマクロ温度勾配に比例するものと仮定する。

$$T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\zeta^j(\mathbf{y}) \frac{\partial T^0(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \tilde{T}^1(\mathbf{x}, t) \quad (3.27)$$

ここで、スカラー値関数 ζ^j は長さの単位を有する「特性関数」と呼ばれるもので、各 j 成分の単位マクロ温度勾配を与えたときのユニットセルの Y -周期的な応答関数である。また、 $\tilde{T}^1(\mathbf{x}, t)$ は Y_t において定数であるが、 T^1 (および ζ^j) に次の条件式を課すことにより定めることができる。

$$\int_{Y_t} T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dy = 0 \Rightarrow \tilde{T}^1(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.28)$$

T^1 の関係式 (3.27) をミクروسケールの弱形式 (3.25) に代入することにより、特性関数に関する方程式が得られる。

$$\int_{Y_t^0} \nabla_y \bar{T}^1 \cdot \mathbf{k} \nabla_y \zeta^j dy = \int_{Y_t^0} \nabla_y \bar{T}^1 \cdot \mathbf{k} \mathbf{I}^j dy \quad \forall \bar{T}^1, t \in (0, t_{\text{end}}], \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

ここに、 \mathbf{I}^j は各 j 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 である単位マクロ温度勾配であり、3 次元問題の場合はその 3 パターンについて解くことになる。本論文では、上式 (3.29) を「特性方程式」と呼ぶこととし、 j 番目の特性関数を成分に持つベクトルを ζ と表記する。また、ユニットセルの領域 Y_t は本来マクロ物質点に対応して決まる領域であるが、ミクروسケールの支配方程式に対してマクロ変数はパラメータとみなされるので、特性関数 ζ^j に対しても \mathbf{x} はパラメータにしか過ぎない。同様に、 Y_t は経時的に変化するが、式 (3.29) は時間発展方程式ではないので ζ^j は時間に依存した変数ではなく時刻 t はパラメータとみなされる。

一方、 T^1 の関係式 (3.27) をマクロスケールの弱形式 (3.24) に代入することにより、マクロスケールの温度 T^0 に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R_t^H \bar{T}^0 \dot{T}^0 dx + \int_{\Omega} \nabla_x \bar{T}^0 \cdot \mathbf{k}_t^H \nabla_x T^0 dx + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 T^0 d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 T^0 dx \\ = \int_{\Omega} f_t^H \bar{T}^0 dx - \int_{\Gamma_q} \hat{p} \bar{T}^0 d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_{\infty}} k_{\infty} \bar{T}^0 \hat{T}_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} k_{S_t}^H \bar{T}^0 \hat{T}_S dx \quad \forall \bar{T}^0, t \in (0, t_{\text{end}}] \end{aligned} \quad (3.30)$$

上式における \mathbf{k}_t^H は均質化熱拡散係数テンソルであり、次式で定義される。

$$\mathbf{k}_t^H = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^0} (\mathbf{k} - \mathbf{k} \cdot \nabla_y \zeta) dy \quad (3.31)$$

ここで、 $\zeta = \{\zeta^1 \ \zeta^2 \ \zeta^3\}^T$ である。

3.2.5 マクロからミクロへの局所化

線形な熱拡散問題を仮定し、均質化により得られたマクロ応答から、ユニットセルにおけるミクロ応答を求める。

まず、ミクロ温度勾配の式 (3.26) をマクロ問題の解であるマクロ温度勾配 $V(\mathbf{x}, t)$ を用いて次のように書き換える。

$$\nabla_y z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = V(\mathbf{x}, t) + \nabla_y T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (3.32)$$

これを \mathbf{y} について積分することにより、ミクロ温度分布に関する次式を得る。

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = V(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{y} + T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \tilde{T}^z(\mathbf{x}, t) \quad (3.33)$$

ここで、 $\tilde{T}^z(\mathbf{x}, t)$ は不定項であり、物理的な要請として次の関係を定める。

$$\langle z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle = \frac{1}{|Y_t|} \int_{Y_t^0} z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = T^0(\mathbf{x}, t) \quad (3.34)$$

上式と $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ の Y -周期性に関する式 (3.28) を用いることにより、不定項 $\tilde{T}^2(\mathbf{x}, t)$ は次式で与えられる。

$$\tilde{T}^2(\mathbf{x}, t) = T^0(\mathbf{x}, t) - V(\mathbf{x}, t) \cdot \langle \mathbf{y} \rangle \quad (3.35)$$

これと $T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の仮定式 (3.27) を考慮することにより、ユニットセルの温度関数 $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は次式となる。

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = V \cdot (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle - \zeta(\mathbf{y}, t)) + T^0(\mathbf{x}, t) \quad (3.36)$$

3.2.6 熱拡散問題の均質化法におけるユニットセルの特徴

力学の変形問題における均質化法による2変数境界値問題では、主にひずみという無次元の物理量を介してミクロとマクロを連成させるので、一般にユニットセルの座標系 \mathbf{y} は任意でよく、マクロ座標系 \mathbf{x} との関係に捉われることはない。これに対して、熱拡散問題においては、ミクロとマクロを結び付ける役割を担う温度勾配が長さの次元を有しているので、特に本研究で対象とするミクロスケールの内部熱伝達をモデル化する場合には、ユニットセルの座標系 \mathbf{y} をマクロ座標系 \mathbf{x} と無関係に設定することは適切ではない。また、多孔質体の解析では、マクロ構造に対するミクロスケールの孔の表面積が内部伝達に影響することになる。以下では、熱拡散問題の均質化法におけるユニットセルの座標系 \mathbf{y} に関する考察を行う。

3.2.6.1 ユニットセルにおける内部熱伝達

式 (3.14) を仮定して得られた均質化内部熱伝達係数 $k_{s,i}^H$ に関する式 (3.22) は、表面積分量の体積平均を計算する式である。これは、図-3.2 に示されるように、同じ体積分率を有するユニットセルでも大きさが異なれば変化する量であり、ユニットセルの多孔質性がマクロ構造に占める割合を示すものとなる。したがって、ミクロ構造（ユニットセル）を有限要素メッシュなどでモデル化する際は、マクロ構造の大きさを考慮したものでなければならない。例えば、マクロスケールが [mm] 単位で表されているのであれば、ミクロスケールも [mm] 単位でモデル化されなければならないことになる。

次節では、簡単な数値実験を実施することにより、このような多孔質性による内部熱伝達による影響について調べるとともに、ユニットセルの大きさが内部熱伝達に与える影響についても検証する。

3.2.6.2 局所化におけるマイクロ温度分布

局所化において、マイクロ温度分布を求めるための式(3.36)を導出した。ここで、**図-3.3**に示されるようにユニットセルの中心をマイクロ座標系 y の原点と設定することにより、次の関係を得ることができる。

$$\frac{1}{|Y_i|} \int_{Y_i} y dy = \langle y \rangle = 0 \quad (3.37)$$

したがって、局所化におけるマイクロ温度分布に関する式(3.36)は次式のように書き換えられる。

$$z(x, y, t) = V(x, t) \cdot (y - \zeta(y)) + T^0(x, t) \quad (3.38)$$

ただし、本研究の定式化においては、このマイクロ温度分布の時間発展形式は得られず、上式はマクロスケールの温度および温度勾配の各時刻での値に依存してマイクロ温度分布を定める式である。

また、局所化においてミクロスケールの温度分布を算定する際にも、ユニットセルの実際の大きさを加味する必要がある。次節において簡単な数値実験を実施することにより、ここで与えた局所化におけるマイクロ温度分布に関する式(3.38)の妥当性を検証する。

3.3 熱拡散問題の均質化法の解析精度に関する検証例題

本節では、これまでに示した微視領域での熱伝達を考慮した均質化法の定式化とこれに基づくマルチスケール熱拡散解析手法の解析精度を検証するとともに、その数値解析的な特徴についても整理する。特に、本研究で取り入れた微視領域での内部熱伝達の影響と、マクロ・ミクロの両スケールにおける熱拡散問題の均質化解析の精度に関する数値実験を行う。以下の数値実験では、双1次形要素による有限要素近似を適用する。

3.3.1 均質化によるマクロ問題の解析精度

ミクロスケールにおいて内部熱伝達を与える孔はないものとして、前節で示した「均質化」によって得られるマクロ熱拡散問題の解析精度について検討する。なお、ミクロスケールにおける非均質性が不規則となるケースを**付録A**に示しておく。

はじめに、**図-3.4**に示されるような母材と介在物からなる2相複合材料の平面問題を考える。同図(a)は、代表体積要素(ユニットセル)と均質化法によりモデル化されるマルチスケール解析モデルであり、同図(b)はユニットセルを単純に並べた直接解析モデルである。直接解析モデルは、セルの配置を 5×5 、 10×10 、 15×15 、 20×20 、 25×25 とし、ユニットセルの均質化により得られるマクロ問題の精度を検討する。同図(c)に示される材料パラメータを用いて、3秒間を30ステップで非定常解析を行うこと

とし、境界条件は Γ_2 と Γ_3 に断熱境界、 Γ_1 と Γ_4 に温度境界 100°C を与え、境界 Γ_2 と Γ_3 での応答温度の合計値を比較するものとする。また、直接解析においてはセル数の増加により有限要素メッシュが細かくなっていくので、メッシュ依存性が表れないよう、マルチスケール解析におけるマクロ有限要素メッシュは直接解析と同等の分割数を設定する。

セル数の増加に伴う均質化法の与える解と直接解析の解との差の関係を図-3.5に示す。なお、この差は次式で定義した。

$$\sqrt{\frac{\sum_i^{N_{23}} (T_i^{\text{dir}} - T_i^{\text{hom}})^2}{\sum_i^{N_{23}} (T_i^{\text{dir}})^2}} \times 100 \quad (\%) \quad (3.39)$$

ここで、 N_{23} は境界 Γ_2 と Γ_3 の節点数、 T_i^{dir} と T_i^{hom} はそれぞれ境界 Γ_2 と Γ_3 上の節点 i での直接解析から得られる温度と均質化によるマクロ解析から得られる温度である。図-3.5に示されるように、セル数の増加に伴い両者の差が減少していく傾向が得られており、両対数軸で直線的であることが分かる。また、均質化法による結果はセル数が 5×5 である比較的粗いモデルにおいても差が1%未満であり、十分に適用範囲であることを示している。図-3.6は解析時刻1秒のときの各温度分布を示したものである。これらの結果から、セルの数が増加するにつれて均質化法による解析結果に漸近することが分かる。

3.3.2 局所化によるミクロ問題の解析精度

本論文で提示した熱拡散問題の均質化法では、図-3.3のようなユニットセルの座標系を設定することにより、局所化においてミクロスケールの温度分布を求める式(3.38)を導出した。以下では、図-3.7(a)に示されるような単純な2相材料の熱拡散問題を設定し、その局所化に際してとなり合うユニットセル間での温度分布の連続性と式(3.38)の妥当性を検証する。

図-3.7(b)に示されるように、ユニットセル同士がとなり合うようマクロ要素内にちょうど4個配置されるようセルの位置を設定し、図-3.7(a)における要素Eを検証対象とする。また、境界条件は Γ_1 と Γ_3 に断熱境界、 Γ_2 と Γ_4 に温度境界を設定し、ミクロおよびマクロ構造のメッシュ分割は同図に示される通りとし、同図(c)に示される材料パラメータを用いてマクロスケールにおける定常状態を解析する。

ミクロ温度関数に関する式(3.38)の各項のうち、 y_1 方向における $V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$ と $\zeta(\mathbf{y}) \cdot V(\mathbf{x})$ の分布を図-3.8に、 $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $T^0(\mathbf{x})$ の分布を図-3.9にそれぞれ示す。これらの図に示されるように、ミクロ温度分布 $z(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はユニットセルをまたいで連続となっており、ミクロ座標系 \mathbf{y} の原点をユニットセルの中心に定義することによって導出した式(3.38)の妥当性を示している。さらに、図-3.9におけるA点とB点に示されるユニットセルの境界での温度(60°C と 50°C)は、要素Eの左右両辺上で算出される定常状態におけるマクロ温度と一致しており、ミクロ温度分布に関する式(3.38)はマクロ問題と整合していることが分かる。

3.3.3 多孔質性によるマイクロ熱伝達の検討

本研究では、熱拡散問題の均質化法に対して、多孔質性によるミクロスケールでの内部熱伝達境界を新たに導入した。以下では、構成材料が異なる場合や内部境界の温度が異なる場合に対するミクロスケールの内部熱伝達の特性や、それがマクロ応答に与える影響について検討する。

図-3.10(a)に示されるような内部に空洞を有するマイクロ構造を配した熱拡散問題を想定し、そのマイクロ構造内の境界 S から熱伝達が発生する場合を考える。この検証例では、マイクロ構造の構成材料は同図に示されるように、銅とチタンの2種類を用いることとし、内部熱伝達境界条件は空洞境界 S に温度 100°C と 10°C の2ケースが与えられるものとする。また、マクロスケールの境界条件は Γ_1 と Γ_3 に断熱境界、 Γ_2 と Γ_4 に外部熱伝達境界を与えて定常状態を解析するものとする。なお、各熱伝達境界における熱伝達係数は次の値を用いる。

$$\begin{aligned} 20000 \text{ W/m}^2\text{K} \quad \text{on } \Gamma_2, \quad 50000 \text{ W/m}^2\text{K} \quad \text{on } \Gamma_4 \\ 100 \text{ W/m}^2\text{K} \quad \text{on } S \end{aligned}$$

銅を構成材料としたケースの x_1 方向の温度分布を図-3.11に、チタンを構成材料としたケースの x_1 方向の温度分布を図-3.12にそれぞれ示す。ここで、黒の実線は内部の熱伝達を考慮しない場合の結果である。これらの図に示されるように、与えられた温度による内部熱伝達の影響が大きく表れている。特に、熱伝導性の高い銅では外部からの熱伝達の影響の方が大きく、また熱伝導性の低いチタンでは内部からの熱伝達の影響の方が大きく表れるといった物理的に妥当な結果が得られている。このことは、本研究で定式化したミクロスケールでの内部熱伝達を考慮した熱拡散問題の均質化法の妥当性を例証している。

3.4 3次元多孔質体の熱拡散に関する数値解析例

本節では、実際的な多孔質体の熱拡散問題を想定した3次元数値解析例を紹介し、本研究で定式化したミクロスケールでの熱伝達を考慮した均質化法によるマルチスケール熱拡散解析の妥当性を検証する。

3.4.1 解析対象と条件

解析対象は、図-3.13(a)に示されるような多孔質体で構成される3次元円柱形部材である。マクロ構造に対しては、図-3.13(b)に示される6720要素の有限要素モデルを設定し、マイクロ構造に対しては、 $80 \times 80 \times 80$ のボクセルメッシュによる有限要素モデル[13, 14]を適用する。ここで、ボクセルメッシュとは微小立方体要素の集合であり、複雑な幾何形状に対して近似的に有限要素モデルを作成するものである。また、マクロおよびミクロスケールともに低次の六面体有限要素を適用する。マクロスケールの境界条件は、図-3.13(c)に示されるように、 x_3 方向両端に温度境界を

設定し、部材内部は常時 200℃の熱流体で満たされており、ミクロスケールの孔の境界において内部熱伝達が与えられるものとする。解析ケースは図-3.13(d)に示す3ケースとし、Case-1は内部熱伝達を考慮しない通常のケース、Case-2とCase-3はミクロ構造（ユニットセル）の大きさを変化させて内部熱伝達を考慮するケースである。3ケースともに孔内の流体による熱の移流は無視し、定常状態を解析する。

3.4.2 解析結果と考察

はじめに、マクロスケールおよびミクロスケールにおける温度分布の結果を図-3.14に示す。マクロ温度分布において、Case-1では等間隔の温度分布（線形分布）が示されているが、ミクロスケールでの熱伝達が行われるCase-2とCase-3ではマクロ領域中央付近でCase-1とは異なった温度分布が得られている。また、ミクロ温度分布においても、Case-1とCase-2で異なった温度分布となっており、ミクロ構造の大きさが異なるCase-2とCase-3を比較すると、セルサイズの小さなCase-3の方が局所的な温度分布が示されているなど、それぞれのセルのサイズに応じた温度分布性状が得られており、物理的な考察と一致する結果となっている。

次に、マクロスケールでの x_3 方向における温度分布の詳細を図-3.15に示す。この図に示されるように、Case-1の線形分布と比較して、Case-2とCase-3の内部熱伝達による影響が条件ごとに顕著に表れていることが分かる。特に、ユニットセルの大きさが異なるCase-2とCase-3を比較すると、ユニットセルの小さなCase-3の方が内部熱伝達境界の占める表面積が大きくなるため、孔内温度である200℃の影響が大きくなるといった物理的に妥当な結果が得られている。

3.5 おわりに

本章では、多孔質体の熱拡散解析手法に着目し、ミクロスケールでの内部熱伝達を考慮した熱拡散問題の均質化法を定式化することに加えて、力学問題の均質化法と異なる点について、特にユニットセルの大きさや座標系による影響について整理・考察した。そして、ミクロスケールに着目した熱拡散問題の均質化法の精度検証や、多孔質体を対象とした3次元数値解析例を通して、本定式化および解析手法の妥当性・有効性を例証した。以下に、本研究の成果と数値実験から得られた知見を簡単にまとめる。

- 熱拡散問題の均質化法は、一般的な力学問題における均質化法とは異なり、ユニットセルの大きさや座標系の設定に注意が必要であり、本研究で新たに考慮した内部熱伝達の項もユニットセルの大きさに影響する。
- 熱拡散問題の均質化法における均質化により得られるマクロ応答は、非均質な材料に対して十分な解析精度を有する。

- 熱拡散問題の均質化法における局所化により得られるマイクロ応答は、対応するマクロ応答と整合しているが、ユニットセルの大きさや座標系の設定に注意が必要である。
- ミクロ領域における内部熱伝達を新たに導入することにより、物理的な考察と一致した熱拡散解析を行うことができ、またユニットセルの大きさを考慮した結果を得ることができる。
- 高温環境下での多孔質体を対象とした実際的な3次元問題に対して、ミクロ構造の大きさ、すなわち孔の大きさを考慮したマルチスケール熱拡散解析を行い、良好な結果を得ることができる。

参考文献

- [1] Mehta, P.K. and Monteiro, P.J.M. (田澤榮一, 佐伯 昇 監訳): コンクリート工学, 微視構造と材料特性, 技報堂出版, 2000.
- [2] Patankar, S.V. (水谷幸夫, 香月正司 共訳): コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985.
- [3] Babuška, I. : Homogenization and its application. Mathematical and computational problems, *Numerical solution of partial differential equations III*, Academic Press, New York, pp.89–115, 1976.
- [4] 寺田 賢二郎, 菊池 昇: 計算力学レクチャーシリーズ①, 均質化法入門, 丸善, 2003.
- [5] Yi, Y., Park, S., Youn, S. : Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.35, pp.2039–2055, 1998.
- [6] Allen, D.H., Yoon, C. : Homogenization techniques for thermoviscoelastic solids containing cracks, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.35, pp.4035–4053, 1998.
- [7] Terada, K., Ito, T., Kikuchi, N. : Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.153, pp.223–257, 1998.
- [8] Takano, N., Zako, M., Okazaki, T., Terada, K. : Microstructure-based evaluation of the influence of woven architecture on permeability by asymptotic homogenization theory, *Compos. Sci. Technol.*, Vol.62, pp.1347–1356, 2002.
- [9] Kamiński, M. : Homogenization technique for transient heat transfer in unidirectional composites, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.503–512, 2003.
- [10] Kamiński, M. : Homogenization of transient heat transfer problems for some composite materials, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.41, pp.1–29, 2003.
- [11] Asakuma, Y., Miyauchi, S., Yamamoto, T., Aoki, H., Miura, T. : Homogenization method for effective thermal conductivity of metal hybrid bed, *Int J Hydrogen Energy*, Vol.29, pp.209–216, 2004.

- [12] Yu, Q., Fish, J. : Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales: a coupled thermo-viscoelastic example problem, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.39, pp.6429–6452, 2002.
- [13] Hollister, S.J., Kikuchi, N. : Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotech. Bioengrg.*, Vol.43, pp.586–596, 1994.
- [14] Terada, K., Miura, T., Kikuchi, N. : Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Comput. Mech.*, Vol.20, pp.331–346, 1997.

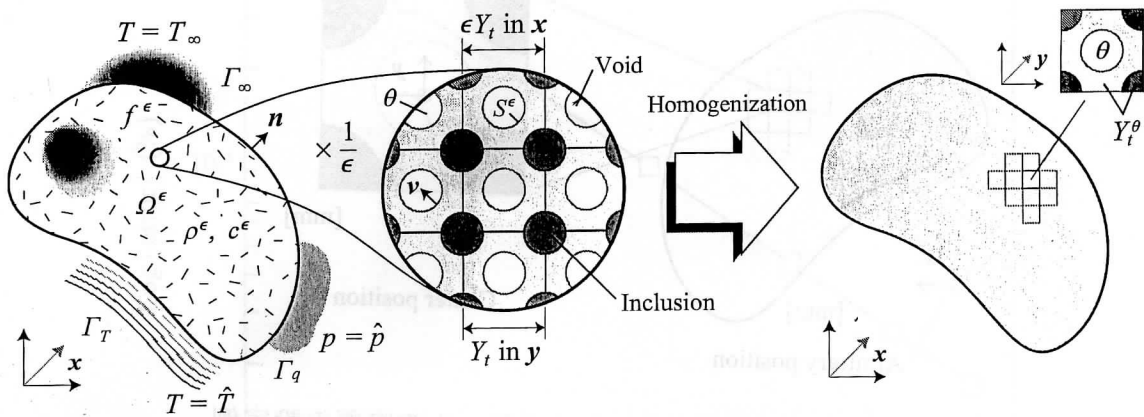


図-3.1 均質化法に基づく温度場マルチスケール問題

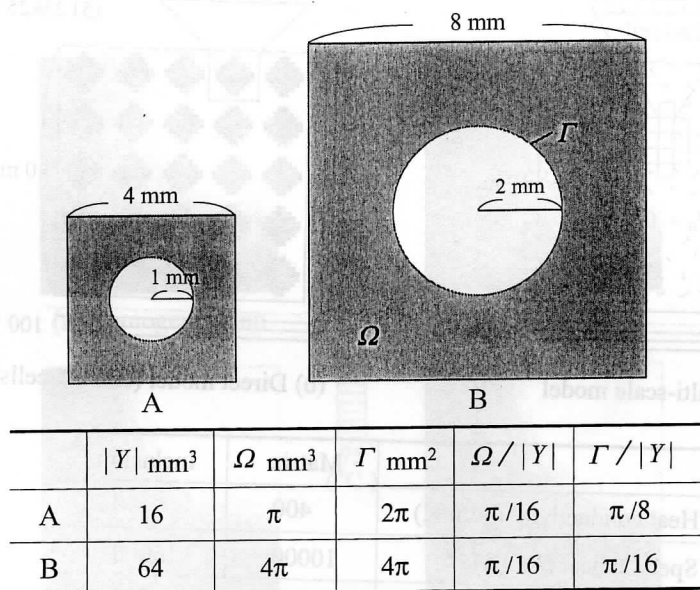


図-3.2 ユニットセルの大きさと孔の体積比・表面積比の関係

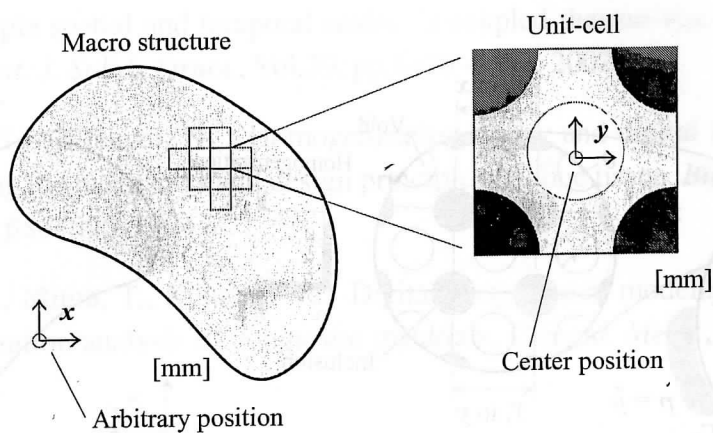
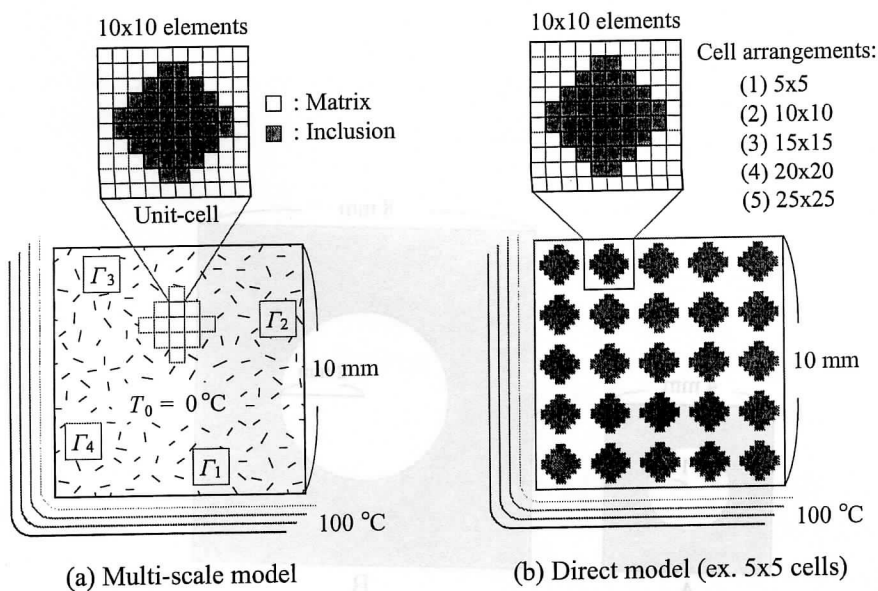


図-3.3 マクロスケールおよびミクロスケールの座標の設定例



	Matrix	Inclusion
Heat conductivity (W/mK)	400	40
Specific heat (J/kgK)	10000	15000
Density (kg/m ³)	400	400

(c) Material parameters

図-3.4 均質化によるマクロ解析の精度検証のためのモデル

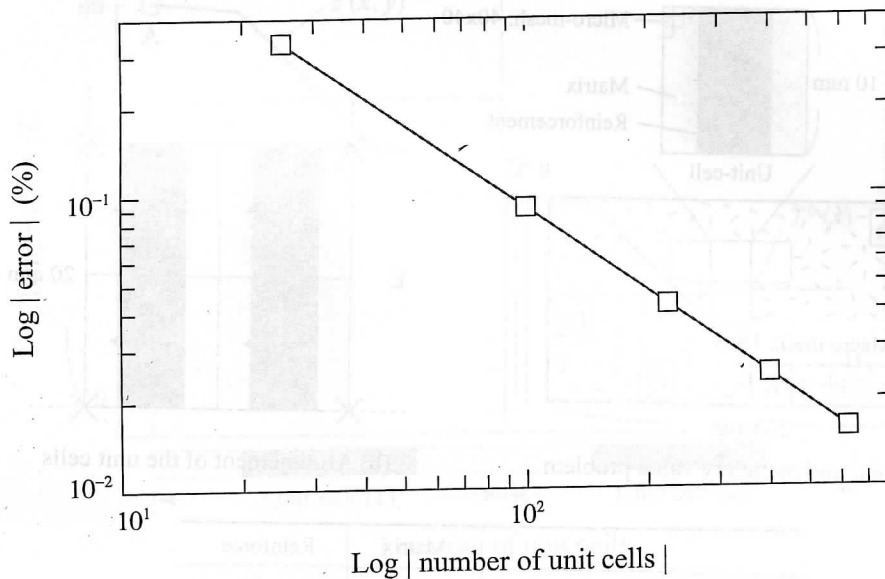


図-3.5 セル数を増加させた直接解析と均質化解析による解の差の関係

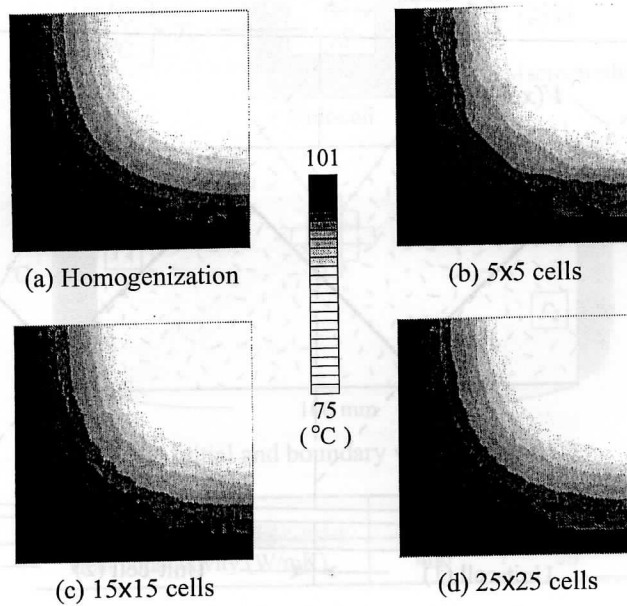
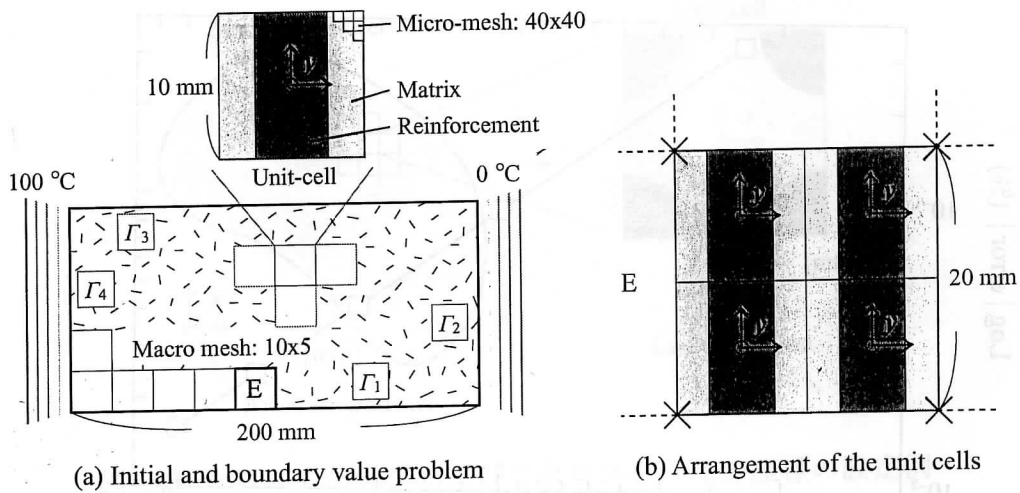


図-3.6 マルチスケール解析と直接解析による温度分布の比較



	Matrix	Reinforce
Heat conductivity (W/mK)	400	40

(c) Material parameters

図-3.7 局所化によるマイクロ温度分布の検証のためのモデル

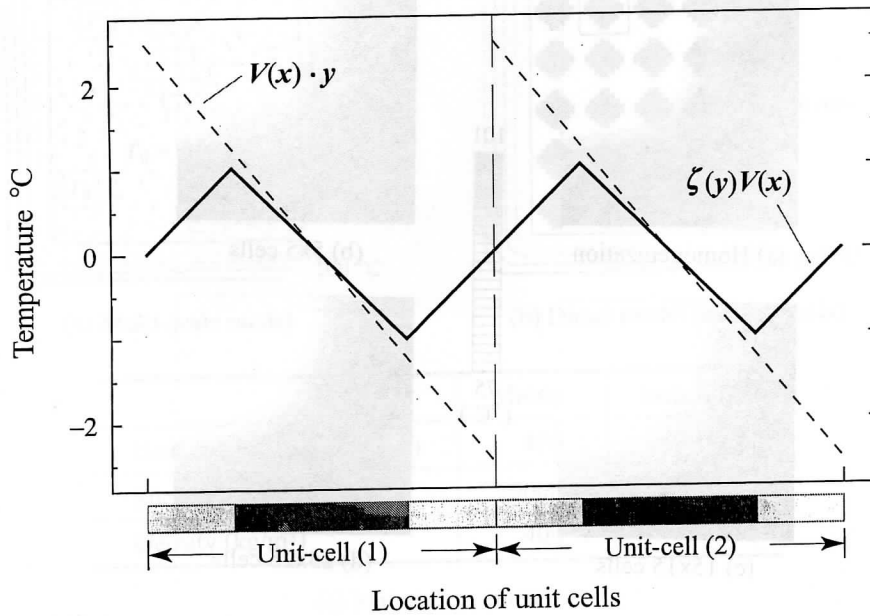


図-3.8 ユニットセルにおける温度関数の分布 (その 1)

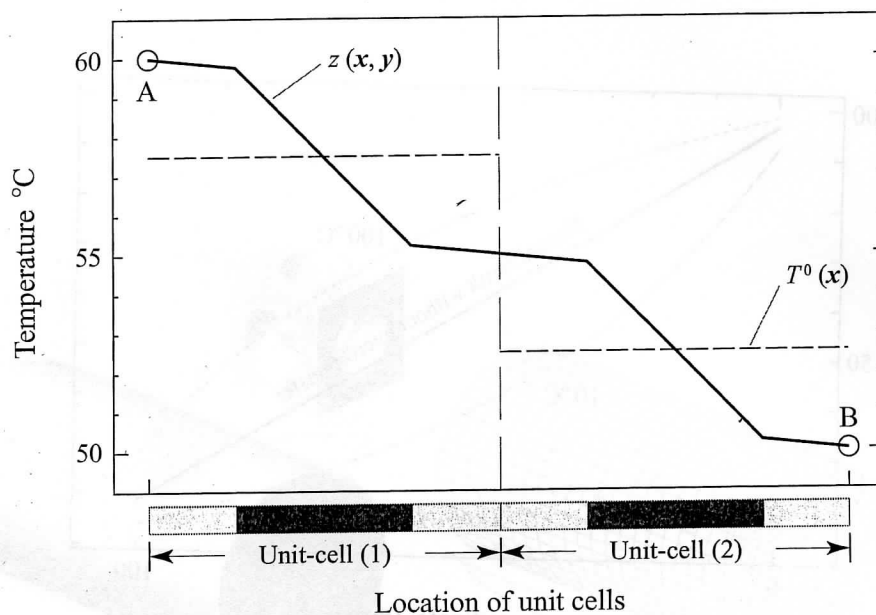
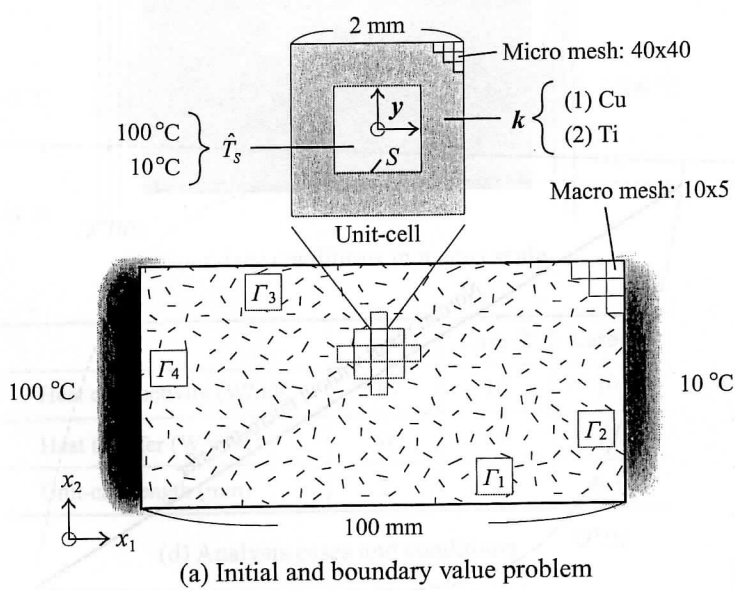


図-3.9 ユニットセルにおける温度関数の分布 (その2)



	Cu	Ti
Heat conductivity (W/mK)	400	20

(b) Material parameters

図-3.10 マクروسケール・ミクروسケールともに熱伝達境界を有する例題

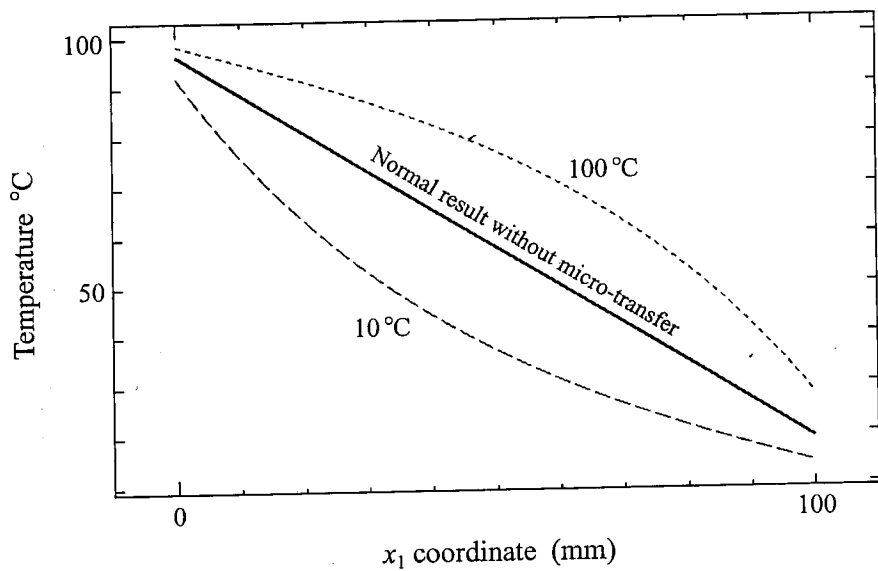


図-3.11 銅のケースにおける x_1 方向の温度分布

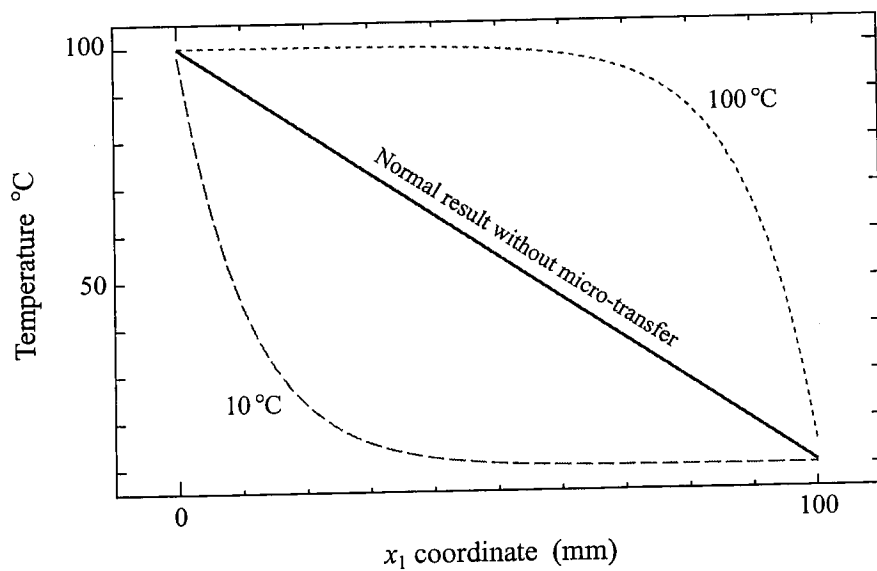
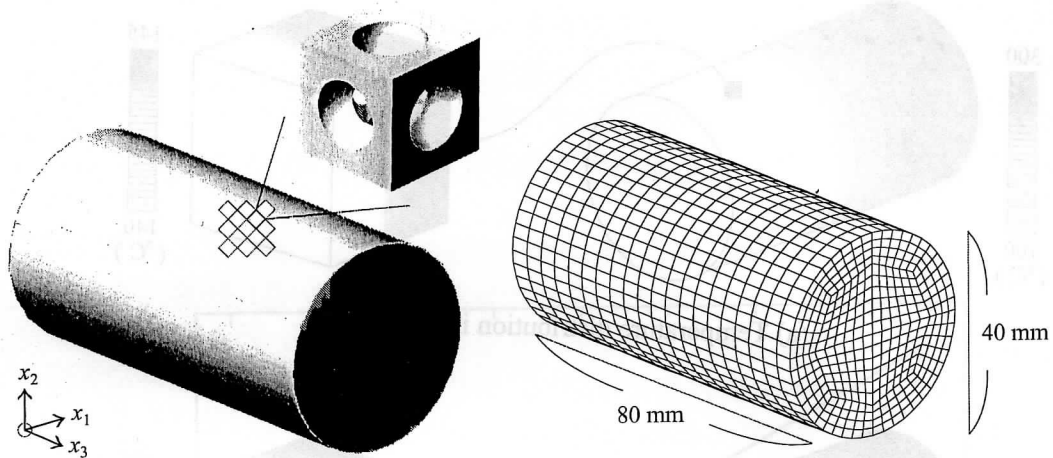
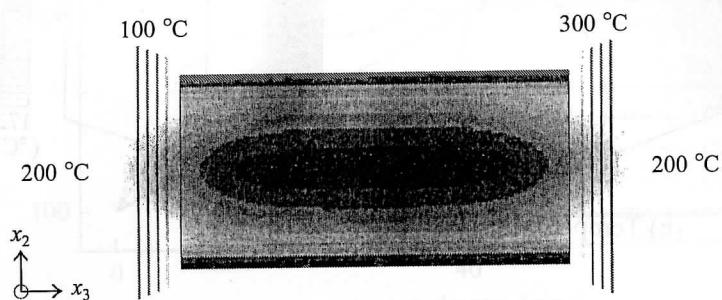


図-3.12 チタンのケースにおける x_1 方向の温度分布



(a) 3D-CAD model

(b) Finite element model of macro-structure

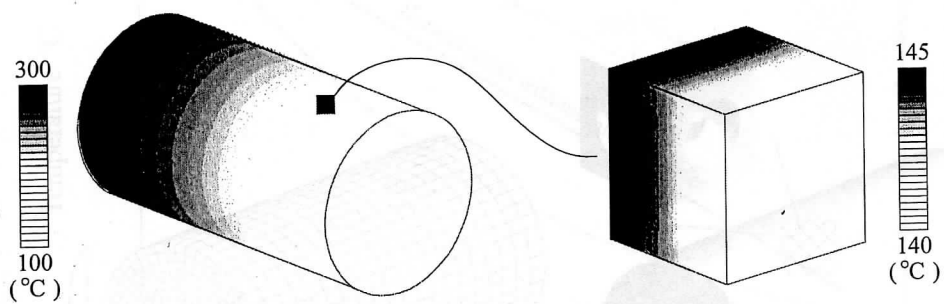


(c) Boundary conditions in macro-scale

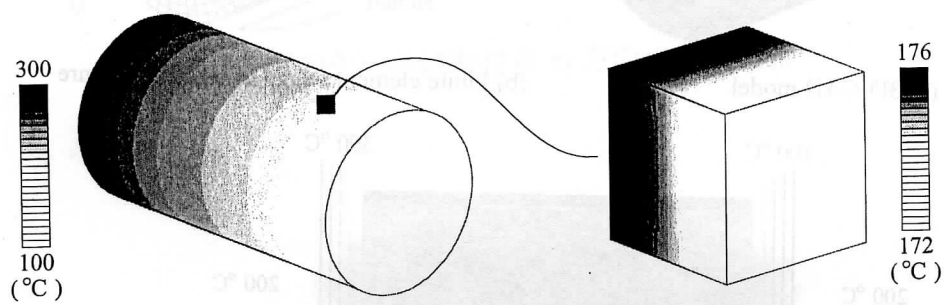
	Case-1	Case-2	Case-3
Heat conductivity (W/mK)	10	10	10
Heat transfer (W/m ² K)	0	10	10
Unit-cell length (mm)	2	2	0.5

(d) Analysis cases and conditions

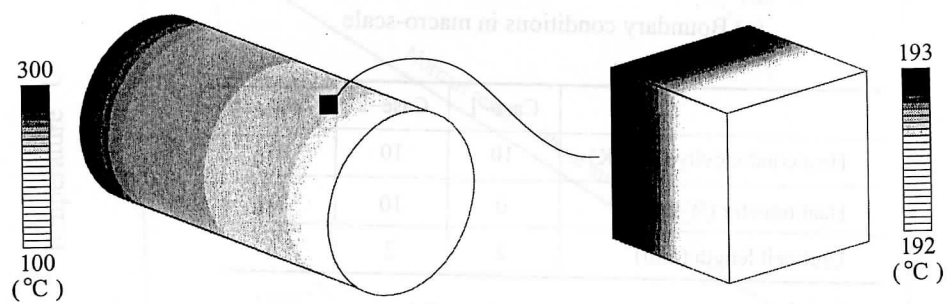
図-3.13 高温環境下における多孔質円柱形部材



(a) Temperature distribution in case-1



(b) Temperature distribution in case-2



(c) Temperature distribution in case-3

図-3.14 多孔質円柱形部材に対するマクロ構造・ミクロ構造の温度分布

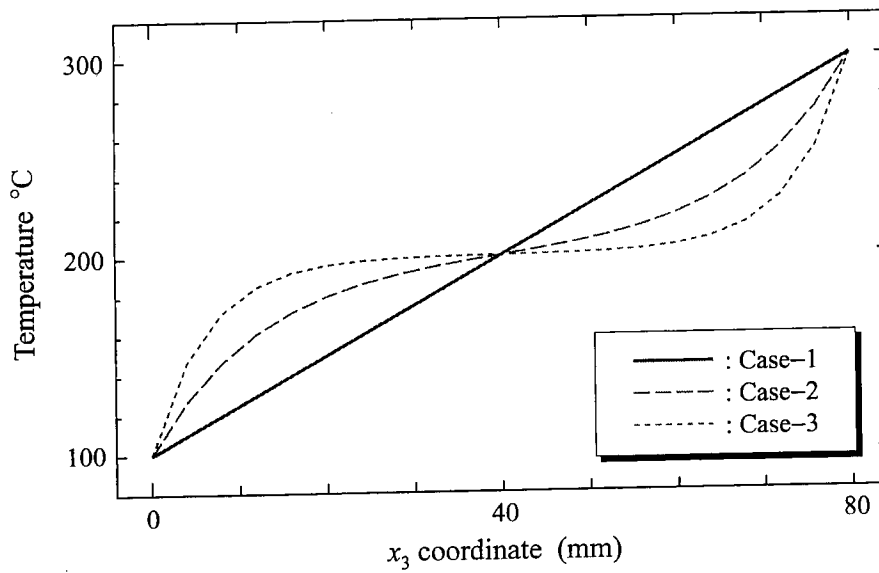


図-3.15 多孔質円柱形部材に対する x_3 方向のマクロ温度分布

第4章 多重被覆モデリングによる有限被覆法

4.1 はじめに

コンクリートのような非均質材料のひび割れ進展問題では、変位の不連続性およびひずみの不連続性の両方をモデル化するのに加えて、メッシュに制約されないひび割れ進展挙動の再現が求められる。従来の有限要素法（以下、FEM）では、メッシュによって何らかの制約を受けることから、任意のひび割れ進展を適切に表現することができず、従来のFEMに代わる解析手法、あるいは従来のFEMを拡張した解析手法の研究が行われている。

1990年代中頃、要素による束縛からの解放を目指して Element Free Galerkin 法 [1] に代表される要素のない節点のみによる解析手法の開発が全盛期をむかえた。しかしながら、節点のみの近似には領域積分や境界条件の扱いが煩雑であるといったデメリットが多く、近年では、要素が有する技術的資産の重要性が再認識され、要素を用いた近似、特に PU 条件 (Partition of Unity) [2] を有限要素近似に導入した解析手法が注目を集めている。このような解析手法は、しばしば FEM の一般化あるいは一般化有限要素法と総称され、Manifold 法 [3] を前身とする有限被覆法 (Finite Cover Method, 以下 FCM) [4] や X-FEM [5], GFEM [6] などはその代表である。これらの手法は、解析対象領域の幾何形状にとらわれることなく自由に近似部分領域である要素を構成することが可能であることから、微視構造 [7, 8] や強不連続性 [9], 相転移 [10, 11] の解析に効果を発揮している。

固体の分野に広く応用されている X-FEM では、PU 関数と Enrich 関数を用いることにより、要素をまたぐ円孔・介在物のモデル化 [12] やひび割れ形成から進展に至る解析が行われている。しかしながら、非均質材料のメゾあるいはミクロ構造の解析において、介在物が密に配置された場合に対する節点のサポート領域の定義方法や Enrich 関数の設定方法は示されておらず、十分なモデル化には至っていない。また、異種材料間の界面剥離やひび割れ進展解析についても完成には至っておらず [13], 構造解析において利便性の高い定型メッシュを用いたこれらの解析も実現されていない。

一般化有限要素法のひとつである FCM では、PU 条件を満たす重み近似関数を定義する数学領域と解析対象領域である物理領域を独立に定義できることから、X-FEM と同様に、FEM でいうところの要素内に物理境界が位置することを許容している。また FCM では、変位などの物理量は物理領域の部分領域である物理被覆単位で定義されることから、材料界面やひび割れなどの不連続境界を捕捉しておけば、X-FEM

のような関数の設定方法に関する問題は生じない。したがって、FCMの特徴である被覆ベースの変位近似に注力すれば、定型メッシュのみを用いて、X-FEMでは実現していない介在物が非常に密に配置された非均質材料のメゾあるいはマイクロ構造の解析が可能となる。

そこで本章では、定型メッシュを用いて非均質脆性材料の不連続面進展解析が可能な有限被覆法を開発する。具体的には、まず定型メッシュを用いた2相複合材料の解析、およびその界面剥離やひび割れ進展を含む不連続面進展解析の定式化や解析手順を述べる。次に、介在物が密に配置された問題に対して、レベルセットを用いた被覆ベースのモデリング手法を示す。そして最後に、簡単な検証例題や数値解析例を示し、本解析手法の妥当性や有効性を検討する。

4.2 有限被覆法

4.2.1 FCMの概説と近似構成要素

FEMでは、解析対象を要素という部分領域に分割し、各々に対して節点値による補間近似を導入する。すなわち、要素という部分領域を単位に未知変数の近似を構成し、要素ごとに得られた剛性方程式を要素の結合情報から全体系の連立代数方程式を組み立てるという方法論をとる。これに対してFCMでは、解析対象と支配方程式の分割と再構築という点ではFEMと同様であるが、「近似関数が定義される数学的な部分領域（数学領域）」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域（物理領域）」を分離して考える点がFEMとは異なる。以下では、図-4.1に示されるような2相複合材料に対する有限被覆メッシュを参照しながら、被覆や要素の定義と有限被覆近似における役割について説明する。

はじめに、解析対象領域である「物理領域 Ω 」が N_p 個の部分領域から形成されているものとする。

$$\Omega = \Omega^{[1]} \cup \Omega^{[2]} \cup \dots \cup \Omega^{[N_p]}$$

FCMでは、図-4.1に示されるように近似基底関数の定義域である「数学領域 Ω^M 」が、解析対象である物理領域全体 Ω を覆い尽くすよう独立に設定される。数学領域全体は、図-4.1(a)に示されるように N_M 個の「数学被覆 M_I 」と呼ばれる部分領域が重なり合うことによって形成されている。

$$\Omega^M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{N_M}$$

また、図-4.1(b)に示されるように、数学被覆 M_I と物理領域 $\Omega^{[a]}$ の共通領域を「物理被覆 $P_I^{[a]}$ 」と呼び、変位などの物理量はこの物理被覆上で定義される。

2次元問題で双1次型の重み関数を持った数学被覆により解析領域全体が覆われていることを想定すると、図-4.1(c)(d)における E_M と E_P は、それぞれ4つの数学被覆および物理被覆の共通領域となる。FCMでは、これらの共通領域をそれぞれ「数

学要素」,「物理要素」と呼び, FEMで言うところの要素あるいはメッシュと対応し, 実際の解析に必要な部分領域の最小単位 of データとなる。

図-4.1(e)に示されるように, 異種材料界面やひび割れ等の不連続面によって物理領域が分断される場合, 分断された領域ごとに変位などの物理量を独立に近似するために, 物理被覆を複数(多重)定義することになる。FCMでは, このような不連続性に伴う物理被覆の定義を更新することによって, 容易に非均質材料やそのひび割れ進展をモデル化することができる。また, FEMで言うところの節点に付加される解析自由度は, 不連続性を考慮して多重に生成される物理被覆ごとに定義されることになる。

以上のような定義に従って, 近似性能および利便性の両者に優位な定型の数学メッシュを用いて解析領域全体をモデル化すると, 典型的なFCMのメッシュ形態は図-4.2のようになる。一般に, 物理要素と数学要素が完全に一致する場合は有限要素と同一の要素となるが, 外部境界やひび割れ表面・異種材料界面の付近においては, 図-4.2に示されるように, FCMでは部分的に物理領域を有する特殊な要素が生成される。このような要素は, 「一般化要素」[14, 15]と呼ばれ, FCMやX-FEMなどの一般化有限要素法に特有の要素であり, 複合材料の解析やひび割れ進展解析の近似精度を決定付ける重要な要素であると考えられる。既往の研究[14, 15]において, 一般化要素がFCMの解析精度に与える影響や近似性能が詳しく検討されている。

4.2.2 変位の有限被覆近似

FCMでは, 解析対象領域 Ω とは無関係に配置された数学被覆 M_I において, 次のような「重み関数」が定義される。

$$\begin{cases} w_I(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{for } \mathbf{x} \in M_I \\ w_I(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } \mathbf{x} \notin M_I \end{cases} \quad (4.1)$$

この重み関数は, 要素を構成する際に次のPU条件を満足するように設定しなければならない。

$$\sum_{I=1}^{N_M} w_I(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{in } \mathbf{x} \in M = \bigcup_{I=1}^{N_M} M_I \quad (4.2)$$

ここで, N_M は数学被覆総数であり, 上式は通常のFEMの形状関数において関数の再現性に不可欠な基本的な条件[2]である。

一方, 変位などの物理量は物理被覆 $P_I^{[\alpha]}$ ごとに次式で示される「被覆関数」で近似する。

$$f_I^{[\alpha]}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m p_i(\mathbf{x}) a_{iI}^{[\alpha]} \quad \text{in } \mathbf{x} \in P_I^{[\alpha]} \quad (4.3)$$

ここで, $a_{iI}^{[\alpha]}$ は定数係数の未知パラメータであり, $p_i(\mathbf{x})$ は任意の関数, m は $p_i(\mathbf{x})$ の項数, 添え字 α は構成材料の種類を表している。FCMでは, 変位の近似を次式のようにな重み関数と被覆関数の積で表す。

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) f_I^{[\alpha]}(x) \quad (4.4)$$

$$= \sum_{I=1}^{N_M} w_I(x) \left(d_I^{[\alpha]} + \sum_{i=1}^m p_i(x) a_{ii}^{[\alpha]} \right) \quad \text{in } \Omega \quad (4.5)$$

上式の第2式は被覆中心点，すなわち節点の変位ベクトルを $a_{0I}^{[\alpha]} = d_I^{[\alpha]}$ と置き換えて表したものである。

以上のように，有限被覆近似においては被覆関数を適宜選定することで，精度の向上を図ることが可能であり，被覆同士の間通領域である要素で変位を近似することにより，通常のFEMと等価な近似となる．本研究では，主に， C^0 -PUによる正方形の定型メッシュと $p_i(x) = 0$ とする低次の変位近似を採用する．

4.2.3 FCMによる不連続面進展問題

4.2.3.1 FCMにおける不連続性の表現

X-FEMでは，式(4.5)の $p_i(x)$ を Enrich 関数と呼び，Heaviside 関数を採用することによって変位の不連続性を [9]， $p_i(x)$ に Ramp 関数を採用することによってひずみの不連続性を近似している [12]．しかしながら，本研究で対象としている図-4.3(a)のような複合材料中のひび割れ進展を X-FEM で解析するには，ひずみと変位の不連続性を同時に扱う必要があるため Enrich 関数の設定が非常に煩雑となる．また，このような問題に対する X-FEM における実際のインプリメンテーションについても報告例はなく，一般化有限要素法では未解決な分野となっている．

これに対して，本研究における FCM では，まず定型の数学メッシュで物理領域を覆った後，図-4.3(a)(b)に示されるように数学被覆内の材料界面やひび割れの形態に応じて物理被覆を多重に定義する．そして，それぞれの物理被覆で独立に変位を近似することにより，Heaviside 関数などの Enrich 関数を用いずに変位やひずみの不連続性を表現する．

4.2.3.2 支配方程式

図-4.4に示されるような異種材料境界 Γ_B と不連続面 Γ_D によって， $\Omega^{[1]}$ と $\Omega^{[2]}$ に分断された全体領域 $\Omega = \overline{\Omega^{[1]}} \cup \Omega^{[2]}$ を考える．また，変位が与えられる Dirichlet 境界を Γ_u ，表面力が与えられる Neumann 境界を Γ_t としたとき，領域 Ω の境界全体は $\Gamma = \overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma_t}$ であり， $\Gamma_u \cap \Gamma_t \cap \Gamma_D \cap \Gamma_B = \emptyset$ が満たされるものとする．

このような物理問題に関する線形弾性体の静的つり合い問題を考えると，平衡方程式，ひずみの適合条件式，構成式はそれぞれ次のように与えられる．

$$\nabla \cdot \sigma + \bar{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.6)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \nabla u + (\nabla u)^T \right\} \quad \text{in } \Omega \quad (4.7)$$

$$\sigma = c : \varepsilon \quad \text{in } \Omega \quad (4.8)$$

ここで、 σ , ε , u はそれぞれ領域 Ω で定義される Cauchy 応力, 微小ひずみ, 変位, c は弾性係数テンソル, \bar{b} は物体力を示しており, これらのように添え字 [1], [2] のない変数は領域全体にわたって定義されるものとする. そして, Dirichlet 境界 Γ_u と Neumann 境界 Γ_t および材料界面 Γ_B において次の境界条件が課される.

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4.9)$$

$$t := \sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (4.10)$$

$$u^{[1]} = u^{[2]} \quad \text{and} \quad t^{[1]} = -t^{[2]} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4.11)$$

ここで, t は外向き単位法線ベクトル n で規定される面における単位面積当たりの表面力ベクトルである.

不連続境界 Γ_D では, 相対 (ギャップ) 変位 g を次式で規定する.

$$g := u^{[1]} - u^{[2]} + g_0 \quad \text{on } \Gamma_D \quad (4.12)$$

ここで, g_0 は初期相対変位であり, ひび割れが新たに発生する場合は $g_0 = 0$ である. なお, 界面剥離やひび割れ進展に伴い不連続面が開口した際は, 次の条件が満たされ自由境界として扱う.

$$\sigma^{[1]} \cdot n = \sigma^{[2]} \cdot n = 0 \quad (4.13)$$

4.2.3.3 不連続面先端への Cohesive crack モデルの適用

コンクリートなどの準脆性材料の破壊現象は, 図-4.5 に示されるような開口しているひび割れ先端に存在する破壊進行領域 (FPZ) の力学挙動に大きく関係している. 非均質脆性材料の界面剥離やひび割れの進展を扱う場合, FPZ での力学挙動のモデル化が重要であり, 本研究では Cohesive crack モデルを導入する [16, 17, 18].

FPZ では微細なひび割れにより材料の軟化現象が生じており, 非線形な力学挙動を示す. Cohesive crack モデルは, 非線形破壊力学に基づき, 種々の準脆性材料に適用できるように一般化された FPZ の力学モデルであり, 具体的には, 準脆性材料における FPZ での軟化挙動を仮想ひび割れ上の結合力 (表面力) で代用するモデルである. 図-4.6 に示されるように, Cohesive crack モデルでは, 実験結果に基づいて決定した非線形な表面力-開口変位の関係を定めておけば, 開口変位が大きくなれば結合力を小さくすることで軟化挙動を数値的に表現することができる. 本研究では, Wells and Sluys[16] が採用した次式で示される表面力-開口変位関係を与えるものとする.

$$\|t^{\text{coh}}\| - f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (4.14)$$

ここで, t^{coh} は結合力, f_t は引張り強度, G_f は破壊エネルギー, κ は載荷履歴における最大開口変位である. Cohesive crack モデルにおける仮想ひび割れの発生・進展の詳細は後述する.

4.2.3.4 Hybrid 型の弱形式

図-4.4 に示される 2 相複合材料を対象とする場合，物理領域に対して独立に数学メッシュを構成する FCM では，式 (4.11) の幾何学的境界条件を付帯拘束条件として加えなければならない．この付帯条件は，Lagrange 未定乗数 λ を導入することにより考慮することができ，次に示す弱形式のつぎ合い方程式が導かれる．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta u : c : \nabla u \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta u \cdot \lambda \, d\Gamma + \int_{\Gamma_B} (\delta u^{[1]} - \delta u^{[2]}) \cdot \lambda \, d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta u \cdot \bar{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\delta u^{[1]} - \delta u^{[2]}) \cdot t_D \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_B} \delta \lambda \cdot (u^{[1]} - u^{[2]}) \, d\Gamma = 0 \quad (4.16)$$

ここで， $\delta(\bullet)$ は変数 (\bullet) の変分量であり，Lagrange 未定乗数 λ は，物理的には次式のように不連続境界 Γ_B 上での表面力に対応することが知られている．

$$\lambda = t^{[1]} = -t^{[2]} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4.17)$$

また， Γ_D における表面力ベクトル t_D は次式で与えられ，式 (4.14) の Cohesive crack モデルにおける表面力-開口変位関係を満足するように与えられる．

$$t_D = \sigma \cdot n = \begin{cases} t^{\text{coh}} & \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \\ \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_D \setminus \Gamma_{\text{PZ}} \end{cases} \quad (4.18)$$

ひび割れ進展に伴う物理境界の逐次変化を考慮しながら式 (4.15) と式 (4.16) を解くことにより，非均質脆性材料のひび割れ進展問題の解が得られる．

4.2.3.5 FCM における離散化方程式

離散化方程式を導出するに当たり，2 次元問題における変位・Lagrange 未定乗数は，マトリックス表記 (Voigt 表記) を用いて次式で表される．

$$u(x) = \{u_x, u_y\}^T \approx \begin{cases} \mathbf{W}^{[1]}(x) \mathbf{U}^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \mathbf{W}^{[2]}(x) \mathbf{U}^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\lambda(x) = \{\lambda_x, \lambda_y\}^T \approx \mathbf{L}(x) \mathbf{\Lambda} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4.20)$$

ここで， \mathbf{U} と $\mathbf{\Lambda}$ はそれぞれ数学メッシュにおける変位ベクトル，Lagrange 未定乗数ベクトルであり， \mathbf{W} と \mathbf{L} はそれぞれ \mathbf{U} と $\mathbf{\Lambda}$ に対する補間マトリックスである．また簡単のため，変位境界における Lagrange 未定乗数は省略する．同様に，ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ ・応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ も次のように表記される．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \approx \begin{cases} \partial \mathbf{W}^{[1]}(x) \mathbf{U}^{[1]} = \mathbf{B}^{[1]}(x) \mathbf{U}^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \partial \mathbf{W}^{[2]}(x) \mathbf{U}^{[2]} = \mathbf{B}^{[2]}(x) \mathbf{U}^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \approx \begin{cases} \mathbf{C}^{[1]} \mathbf{B}^{[1]}(x) \mathbf{U}^{[1]} & \text{in } \Omega^{[1]} \\ \mathbf{C}^{[2]} \mathbf{B}^{[2]}(x) \mathbf{U}^{[2]} & \text{in } \Omega^{[2]} \end{cases} \quad (4.22)$$

ここで、 \mathbf{B} は変位－ひずみマトリックス (\mathbf{B} マトリックス), \mathbf{C} は弾性係数マトリックスであり, 微分オペレータ $\boldsymbol{\theta}$ は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (4.23)$$

これらを用いて, 前節で与えた弱形式 (4.15), (4.16) は次式となる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{[1]} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{[1]} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{[2]} & \mathbf{Q}^{[2]} \\ (\mathbf{Q}^{[1]})^T & (\mathbf{Q}^{[2]})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{[1]} \\ \mathbf{U}^{[2]} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{[1]} \\ \mathbf{F}^{[2]} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

ここで, $\mathbf{K}^{[1]}, \mathbf{K}^{[2]}$ は通常の剛性行列, $\mathbf{F}^{[1]}, \mathbf{F}^{[2]}$ は式 (4.15) に対応する右辺ベクトルであり, $\mathbf{Q}^{[1]}, \mathbf{Q}^{[2]}$ は次式で表される.

$$\mathbf{Q}^{[\alpha]} = \int_{\Gamma_B} (\mathbf{W}^{[\alpha]})^T \mathbf{L} d\Gamma, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.25)$$

本研究では, Lagrange 未定乗数をペナルティ法によるバネの反力で近似して, 反復解法により変位と Lagrange 未定乗数を求める Augmented Lagrangian 法 [19] を採用することとする.

4.2.3.6 異種材料界面の剥離

本研究で対象とする界面剥離は, 材料界面における引張りの表面力によって発生するものとする. 材料界面での剥離の発生の判定基準は, 「材料界面での Lagrange 未定乗数が剥離強度 f_t^d に達したときに界面剥離が発生する」とする. 異種材料界面での表面力は, Hybrid 型の弱形式 (4.15), (4.16) において Lagrange 未定定数 λ で近似される. したがって, Lagrange 未定乗数が $\lambda \cdot \mathbf{n} > 0$ かつ $\|\lambda\| \geq f_t^d$ となるとときに界面剥離が生じるものとする.

新たに生じた剥離面は, FPZ として扱う不連続面 Γ_{PZ} となる. 界面剥離の発生直後は, 式 (4.14) に示した Cohesive crack モデルの引張り強度と等しい結合力 (表面力) t^{coh} が剥離変位を抑える方向に作用する.

$$t^{\text{coh}} = f_t^d \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \quad (4.26)$$

そして, 発生後に剥離面が開口する際は, 式 (4.14) に示した Cohesive crack モデルに従い結合力 t^{coh} が改定される.

$$t^{\text{coh}} = f_t^d \exp\left(-\frac{f_t^d}{G_f^d} \kappa\right) \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \quad (4.27)$$

4.2.3.7 構成材料内部のひび割れ

本研究で対象とするひび割れは、コンクリートのような準脆性材料の破壊現象に特徴的な開口ひび割れ（モードⅠ）とし、引張り破壊のみを考慮する古典的な Rankine 破壊基準に従って生じるものとする。さらに、ひび割れ先端領域では、破壊力学における応力の特異性ではなく、図-4.5 のような軟化挙動を示す FPZ を伴うものとする。したがって本研究では、応力拡大係数などの破壊力学のパラメータを用いずに、図-4.5 および図-4.6 で示したように、材料の軟化挙動を示す FPZ を伴うひび割れの発生・進展挙動を Cohesive crack モデルにより表現することにする。

内部領域のひび割れ発生の判定基準は、「ある点の最大主応力 σ_1 が引張り強度 f_t^c に達したときに最大主応力方向と垂直な方向に不連続面が発生する」とする。ひび割れの発生後は、式(4.14)に示した Cohesive crack モデルに従って、開口変位 κ に依存した結合力（表面力） t^{coh} が開口変位を抑える方向に作用するものとする。また、ひび割れは要素を直線で横断し、ひび割れ先端は解析ステップ内で要素内に留まることはないものとする。

FEM のような離散化解析でひび割れ進展を解析する場合、ひび割れ発生の位置や基準に加えて、ひび割れ進展後の挙動が要素の寸法や形状に依存することが報告されている [20]。そこで、ひび割れ発生の判定に用いる最大主応力 σ_1 は、ひび割れ発生位置が要素の寸法や形状に影響を受けないよう、図-4.8 に示されるように対象となる要素 E_0 を構成するすべての物理被覆での応力を次式で与えられる重み付き平均した応力 $\bar{\sigma}$ から算出する [20, ?]。

$$\alpha(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{if } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{if } R \leq r \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\bar{\sigma} = \int_{V_w} \alpha(r) \sigma(r) dv \quad (4.29)$$

ここで、 V_w は平均化を行う領域、 R は対応する影響半径、 r は周囲の点までの距離、 $\sigma(r)$ は r での応力である。このような重み付き平均応力から σ_1 を求めてひび割れの発生・方向を規定する方法は、既報の Cohesive crack モデルと PU-FEM による解析手法でも採用されており [16, 17]、その数値解析の妥当性が確認されている。また、ひび割れ進展長さについては、後述する数値解析アルゴリズム（つり合い計算）の枠組みにおいて上記のひび割れの発生・進展の操作を繰り返すことによって決定される。

新たに生じたひび割れ面は、FPZ として扱う不連続面 Γ_{PZ} となる。ひび割れの発生直後は、界面剥離時と同様に式(4.14)に示した Cohesive crack モデルの引張り強度と等しい結合力 t^{coh} がひび割れ開口変位を抑える方向に作用する。

$$t^{\text{coh}} = f_t^c n_c = \bar{\sigma}_1 n_c \quad (4.30)$$

ここで、 n_c は図-4.6 に示されるようなひび割れ面における外向き単位法線ベクトルである。ひび割れの発生後、ひび割れが開口する際は式(4.14)に示した Cohesive crack モデルに従い結合力 t^{coh} が改定される。

$$\mathbf{t}^{\text{coh}} = f_t^c \exp\left(-\frac{f_t^c}{G_f^c} \kappa\right) \mathbf{n}_c \quad (4.31)$$

また、ひび割れの先端に導入した Cohesive crack モデルにおいて、ひび割れの長さの次元を内包したパラメータである破壊エネルギー G_f が導入されているため、ひび割れ進展に対する要素寸法依存性は小さいことや、非均質準脆性材料に見られる寸法効果が再現可能であることなどが報告されている [18].

4.2.3.8 不連続面進展解析アルゴリズム

本節では、Lagrange 未定乗数を最も簡便なペナルティ法で近似した際の不連続面進展解析アルゴリズムについて述べる。

ペナルティ法では、表面力を表す Lagrange 未定乗数はペナルティ係数と相対（ギャップ）変位を用いて次式のように近似する。

$$\lambda = \frac{\bar{p}}{h_e} (\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]}) = \frac{\bar{p}}{h_e} \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4.32)$$

ここで、 h_e は数学要素の長さである。ペナルティ法によるアルゴリズム上の弱形式は、相対変位 \mathbf{g} を用いて次式で与えられる。なお、簡単のため基本境界での Lagrange 未定乗数は省略する。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_B} \frac{p}{h_e} \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \, d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{PZ}} \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^{\text{coh}} \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ここで、式 (4.14) に示した本研究における Cohesive crack モデルは状態則のみが規定されており、その発展則などに関しては規定されていない。そこで本研究では、 Γ_{PZ} の各位置での結合力 \mathbf{t}^{coh} を弱形式 (4.33) において既知の定数として扱うことにする。

図-4.9 に本研究における不連続面進展解析アルゴリズムを示す。本解析では、ひび割れ形成・進展に伴って発生する解放力を加味した反復計算とひび割れ先端での Cohesive crack モデルを満足させるための Newton-Raphson 法による反復計算を同時に行い、つり合い状態を求める。以下に、関係式を示しながら具体的な解析手順を述べる。

解析ステップ t_n におけるつり合い状態から、次の解析ステップ t_{n+1} になった状態を考える。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_{n+1} \quad (4.34)$$

変位の更新に関するステップを i 、Cohesive crack モデルの改定ステップを p とすると、全変位 \mathbf{u}_{n+1}^i に関する残差は次式で表される。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}_{n+1}^i; \kappa_{n+1}^p) & := \int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}_{n+1}^i : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u}_{n+1}^i \, d\Omega + \int_{\Gamma_B} \frac{p}{h_e} \delta \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \, d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{n+1}^i \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}_{n+1}^i \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{PZ}} \delta \mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}^i) \cdot \mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^p) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.35)$$

図-4.9(c)に示される変位の修正量 $\delta \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}$ を求めるための線形化方程式は、残差 G の \mathbf{u} に関する方向微分で与えられる。

$$DG(\mathbf{u}_{n+1}^i; \kappa_{n+1}^p) [\delta \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1}] := -G(\mathbf{u}_{n+1}^i; \kappa_{n+1}^p) \quad (4.36)$$

本解析では線形弾性体を仮定し、Cohesive crack モデルによる結合力 \mathbf{t}^{coh} を既知としていることから、上式は線形弾性体における剛性方程式と等価となる。上式を解くことにより、次式のように変位を更新する。

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^i + \delta \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{i+1} \quad (4.38)$$

次に、図-4.9(d)において、FPZ の各位置における結合力 \mathbf{t}^{coh} は式(4.14)を満足するように \mathbf{t}^{coh} を改定する。

$$\text{IF } \|g(\mathbf{u}_{n+1}^p)\| > \kappa_{n+1}^p \quad \text{THEN, } \kappa_{n+1}^{p+1} = \|g(\mathbf{u}_{n+1}^p)\| \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (4.39)$$

加えて、これに伴う結合力の改定を行う。

$$\|\mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^{p+1})\| = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa_{n+1}^{p+1}\right) \quad \text{on } \Gamma_{\text{PZ}} \quad (4.40)$$

これを用いて、材料界面の剥離面およびひび割れ面における結合力ベクトルをそれぞれ改定する。

$$\mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^{p+1}) = \|\mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^{p+1})\| \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^{p+1}) = \|\mathbf{t}^{\text{coh}}(\kappa_{n+1}^{p+1})\| \mathbf{n}_c \quad (4.42)$$

以上の過程を経た後に、図-4.9(e)においてつり合いを評価し、残差があれば図-4.9(c)に戻って変位を修正する。

つり合いが満たされた際は、図-4.9(g)において、異種材料界面および構成材料内部に対して新たな不連続面の発生・進展を判定する。判定の結果、新たに不連続面が形成された場合は、これを発生させた後、図-4.9(h)で不連続面形成に伴って発生する解放力を計算し、図-4.9(b)に戻り再度線形化方程式を解きなおす。これら一連の操作を、新たな不連続面の形成がなくなるまで繰り返し、不連続面進展問題の解を求める。

このように本研究では、エネルギー解放率などの破壊力学のパラメータを用いることなく、各荷重ステップにおいて要素単位の不連続面の発生・進展とつり合い計算を繰り返すことによって、最終的なひび割れや界面剥離の長さを決定している。また、既往の Cohesive crack モデルと PU-FEM による解析手法 [16, 17] においても類似の方法が採用されており、その数値解析の妥当性が確認されている。

4.2.4 FCMにおける数値積分

FCMによる非均質材料の解析やひび割れ進展解析では、任意形状の物理領域（物理被覆）が定義されるため、通常FEMのように自然座標系のガウス数値積分法は適用できない。また、ひび割れ進展解析では解析ステップごとに物理領域の幾何形状が変化することからも、数値積分法の取り扱いが非常に重要となる。

本研究では、図-4.10に示されるように、2次元問題における任意の物理領域を三角形に分割し、面積座標に基づくガウス積分法を適用する。さらに、同図のようにひび割れ進展に伴って物理領域が分断された際も、その解析ステップごとに物理領域を三角形に分割して正確に数値積分を行うものとする。

4.3 多重被覆モデリングによるFCM

非均質材料のひび割れ進展問題を一般化有限要素法の一つであるX-FEMで解析するには、不連続ひずみと不連続変位を近似するためのEnrich関数を同時に考慮しなければならない。さらに、介在物を多数有する非均質材料に対しては、FCMの数学被覆に対応する節点のサポート領域に複数の介在物が存在することとなり、X-FEMの既往の研究ではその際のEnrich関数の設定方法について言及されていない。これに対して、FCMでは図-4.3に示したように、変位などの物理量を規定する物理被覆を物理領域の不連続性に応じて複数定義することにより、各種の不連続性を表現する。したがって、FCMでは複雑な非均質材料のモデル化やひび割れ進展解析における物理被覆の特定方法が非常に重要となる。

本節では、複雑な非均質材料に対する数値モデルの生成法およびひび割れ進展に対するFCMのためのモデリング手法を提案する。

4.3.1 非均質材料の有限被覆モデリング

以下では、図-4.11を参照しながら、2相複合材料における物理被覆を定義するためのモデリング手順を述べる。

図-4.11(a)に示される3つの介在物を有する2相複合材料に対して、2次元で 10×10 の定型メッシュを与えるFCMのモデリングを考える。はじめに、図-4.11(b)に示されるように、物理形状を把握するための数値データとして、画像データ（PIXELデータ、図中 P_X ）を準備する。ここで、画像データは定型メッシュ内における物理形状を定義するものなので、定型メッシュよりも高い解像度で生成しておく。そして、同図(b)に示されるように定型メッシュ上に画像データを重ね合わせて座標系を定義した後に、定型メッシュ格子点でのLevel-set関数 F_L を算出する。ここで、Level-set関数は次式で与えられる符号付き最短距離であり、 \mathbf{x} は定型メッシュ格子点位置、 \mathbf{x}_p は画像データ P_X が変化する境界 Γ_p 上での位置、 $\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)$ は \mathbf{x}_p での外向き単位法線ベクトルである。

$$F_L(x) = \min_{x_p \in \Gamma_p} \|x - x_p\| \text{sign}\{n(x_p) \cdot (x - x_p)\} \quad (4.43)$$

定型メッシュ格子点での F_L を算出すれば、要素内の補間により $F_L = 0$ の境界が求められ、材料界面の位置すなわち界面要素を容易に特定することができる。

次に、図-4.11(c)に示されるように、 $F_L > 0$ となる領域にて物理被覆を特定することにより、まず母材の被覆層を定義することができる。同様に、今度は $F_L < 0$ の条件を用いて物理被覆を特定することにより、介在物の被覆層を定義することができる。しかしながら、この種の2相複合材料では同図(c)に示されるように、1つの物理被覆内に2個の介在物が含まれてしまい、それぞれの介在物に対して独立な物理量を定義することができない場合が生じうる。すなわち、Level-set 関数の符号のみで判定すると、不連続性に伴う物理被覆の条件を満たさない可能性がある。

そこで本研究では、図-4.11(d)に示されるように、まず各数学被覆において Level-set 関数を用いて不連続境界が2つ以上存在するかどうかをチェックする。そして、2つ以上の不連続境界が数学被覆内で確認された際は、各介在物を含む物理被覆に異なる被覆層 ID (図中 C_{ID}) を与えて、これを基準に介在物全体が被覆層を形成するように被覆層 ID を修正していくことにより、正確な物理被覆を定義することができる。最終的には、図-4.11(e)に示されるように、得られた被覆層 ID を用いて3層の被覆層を設けることにより物理的に妥当な有限被覆モデルが生成される。

4.3.2 ひび割れ進展の有限被覆モデリング

以下では、図-4.12を参照しながら、ひび割れ進展解析における物理被覆を定義するためのモデリング手順を述べる。

FCM では、図-4.12(a)(c)に示されるように、ひび割れ等の物理境界により物理領域が分断された際には、定義に従って新たな物理被覆を追加することで不連続性を表現する。したがって、FCM によるひび割れ進展解析では、不連続面が数学被覆を横断しているかどうかを解析ステップ毎に調べて物理被覆を追加していけばよい。本研究では、図-4.12(a)に示されるように、前述した Level-set 関数を用いることにより数学被覆の境界にひび割れが到達しているかどうかを解析ステップ毎に判定する(図中の●印)。しかしながら、図-4.12(c)に示されるように、解析対象にはじめから含まれている境界や材料界面が被覆内に存在する際は、境界の内外が一意に定まらないために Level-set 関数を定義することができない。この場合、初期の境界や界面が数学被覆を横断するかどうかは前節の非均質材料の有限被覆モデリング(プリプロセス)にて既知のデータ(図中の○印)であるので、これと Level-set 関数の両方を用いて判定する。

本研究では、以上に示したような Level-set 関数を併用した FCM のためのモデリング技術を「多重被覆モデリング手法」と呼ぶこととする。

4.4 数値解析例

本節では、本研究で構築した非均質脆性材料のための定型メッシュを用いたFCMとその多重被覆モデリング手法の検証例題および数値解析例を示す。はじめに、Cohesive crack モデルを導入したFCMの解析精度を検証した後、多重被覆モデリング手法および非均質脆性材料の強不連続性に関する数値解析例を示す。

4.4.1 ひび割れ進展の検証例題

はじめに、FCMを用いたひび割れ進展解析における要素寸法依存性に関する検討を行う。解析対象は、図-4.13に示されるような円孔穴あき板モデルであり、解析ケースは、定型メッシュの分割数とFCMの近似次数を変化させた4パターンとする。ここで、本解析手法では要素単位でひび割れが進展するので、4パターンのメッシュ分割数は実際のメッシュ分割を考慮したものである。材料パラメータは同図の通りであり、平面ひずみ状態を仮定して変位制御型の数値実験を行う。

各ケースの荷重-変位関係を図-4.14(a)に、ひび割れ形成とvon-Mises応力分布の進展を図-4.14(b)に示す。本研究では、ひび割れの力学挙動に対して、定型メッシュによる空間近似の優位性に加えてCohesive crackモデルを導入したことにより、メッシュ分割数を変化させても要素寸法にほとんど依存しない結果が得られていることが分かる。また、このような実際のメッシュ分割においては、近似次数にもほとんど依存しないことが分かる。

4.4.2 非均質材料におけるひび割れの進展

2相複合材料中におけるひび割れ進展の数値解析例を示す。本例題では、定型メッシュのみを用いて2相複合材料におけるひずみの不連続性およびひび割れ進展における変位の不連続性を同時に扱えることを例証する。解析対象は、図-4.15に示される膨張性介在物を有する複合構造である。解析条件や材料パラメータは同図の通りとし、平面ひずみ条件下で、介在物に熱膨張問題と同様の膨張応力を与えて母材のひび割れ進展解析を行う。

膨張応力の増加に伴うひび割れとvon-Mises応力分布の進展を図-4.16に示す。この図に示されるように、補強物の膨張に伴う母材の損傷がシミュレートできており、定型メッシュのみで材料界面を含む複合構造の解析から母材における複数のひび割れ進展までを一貫して行えている。また、このような複合材料のひび割れ進展を一般化有限要素法の一つであるX-FEMで解析するには、変位の不連続とひずみの不連続の両方をEnrichする困難を伴うが、FCMでは不連続面に対して物理被覆を多重に定義することにより容易にモデル化から解析までを行える。

4.4.3 非均質材料における界面剥離の進展

2相複合材料中における界面剥離の進展の数値解析例を示す。本例題では、定型メッシュのみを用いて介在物が非常に密に配置された複合材料の数値モデルの生成に加えて、界面剥離の進展を容易に扱えることを例証する。解析対象は、図-4.17に示されるような118個の円形介在物を有する2相複合材料のメゾ構造である。この非均質材料は、引張り応答に対して界面剥離を起こすものと仮定し、平面ひずみ条件下で変位制御の引張り载荷を行う。各材料パラメータは同図に示す通りとする。

はじめに、この構造を定型の有限被覆メッシュを用いてモデル化するに際し、本研究で開発した多重被覆モデリング手法を適用した。その結果、形状認識のための 1000×1000 の画像データと 100×100 の定型メッシュを設定したところ、全体で6層の被覆層を用いてモデル化することができた。

次に、界面剥離の進展に伴う構造物上端での荷重－変位関係を図-4.18(a)に、また界面剥離を含む変形図と von-Mises 応力分布を図-4.18(b)に示す。まず、界面剥離が発生していない20ステップ目の結果は、非均質材料の典型的な応力分布となっており、本研究で開発した多重被覆モデリング手法および定型メッシュと界面要素による一連の解析の妥当性が見て取れる。そして、界面剥離の進展結果に示されるように、本解析手法は定型メッシュと界面要素を用いて異種材料界面での剥離挙動の進展を適切に再現できている。

4.5 おわりに

コンクリートのような非均質材料のひび割れ進展解析では、変位の不連続性およびひずみの不連続性の両方をモデル化するのに加えて、メッシュに制約されないひび割れ進展挙動の再現が求められる。FCMやX-FEMなどの一般化有限要素法の特徴を利用すれば、従来のFEMのフレームワークの中で任意の不連続性をモデル化することが可能であり、また空間近似に優位な定型メッシュを採用すれば、メッシュに制約されないひび割れ進展を再現できるはずである。しかしながら、現況の一般化有限要素法に関する既往の研究において、定型メッシュを用いた非均質脆性材料のひび割れ進展解析は実現されておらず、また、介在物が密に配置された複雑な複合材料のモデル化に対するインプリメンテーションも示されていない。

本章では、まず、FCMとX-FEMとの不連続性の近似方法の相違について解説し、FCMではX-FEMのようなEnrich関数の煩雑さを伴うことなく、近似の構成単位である物理被覆を適切に定義・更新することにより、材料界面やひび割れ進展を表現できることを述べた。次に、FCMと空間近似に優位な定型メッシュをベースに、材料界面での近似手法と不連続面先端でのCohesive crackモデルを導入したひび割れ進展解析法を開発した。さらに、FCMにおいて不連続性を表現する上で重要な物理被覆の特定・更新方法に着目し、定型メッシュ上でレベルセット関数を定義することにより、非均質性に伴う材料境界の捕捉やひび割れ進展に伴う不連続境界の捕捉を円滑に行うための「多重被覆モデリング手法」を構築した。そして最後に、いくつ

かの検証例題や数値解析例によって，本研究で開発した定型メッシュを用いた FCM およびそのモデリング手法の妥当性・有効性を例証した．

参考文献

- [1] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. : Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.229–256, 1994.
- [2] Melenk, J.M., Babuška, I. : The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.39, pp.289–314, 1996.
- [3] Shi, G.-H. : Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report*, No.92–1, U.S. Army Research Office, 1991.
- [4] Terada, K., Asai, M., Yamagishi, M. : Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 58, pp.1321–1346, 2003.
- [5] Belytschko, T., Black, T. : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.45, pp.601–620, 1999.
- [6] Strouboulis, T., Babuška, I., Copps, K. : The design and analysis of the generalized finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.181, pp.43–69, 2000.
- [7] Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S. : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.56, pp.609–635, 2003.
- [8] Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., Remacle, J.F. : A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.192, pp.3163–3177, 2003.
- [9] Budyń, E., Zi, G., Moës, N., Belytschko, T. : A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.61, pp.1741–1770, 2004.
- [10] Chessa, J., Smolinski, P., Belytschko, T. : The extended finite element method (XFEM) for solidification problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.53, pp.1959–1977, 2002.

- [11] Ji, H., Dolbow, J.E. : On strategies for enforcing interfacial constraints and evaluating jump conditions with the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.61, pp.2508–2535, 2004.
- [12] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T. : Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.190, pp.6183–6200, 2001.
- [13] Sukumar, N., Huang, Z.Y., Prévost, J.-H., Suo, Z. : Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.59, pp.1075–1102, 2004.
- [14] Terada, K., Kurumatani, M. : Performance assessment of generalized elements in the finite cover method, *Finite Elements Anal. Des.*, Vol.41, pp.111–132, 2004.
- [15] 車谷麻緒, 寺田 賢二郎 : 有限被覆近似における一般化要素の界面近似特性——界面を含む一般化要素のパッチテスト : 日本計算工学会論文集, 論文番号 20060014. 2006.
- [16] Wells, G.N., Sluys, L.J. : A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 50, pp.2667–2682, 2001.
- [17] Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P. : A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.63, pp.276–289, 2005.
- [18] Terada, K., Ishii, T., Kyoya, T., Kishino, Y. : Finite cover method for progressive failure with cohesive zone fracture in heterogeneous solids and structures, *Comput. Mech.*, 2006, in press.
- [19] Simo, J.C., Laursen, T.A. : An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, Vol.42, pp.97–116, 1992.
- [20] Bažant, Z.P., Planas, J. : *FRACTURE AND SIZE EFFECT in Concrete and Other Quasibrittle Materials*, CRC, 1998.

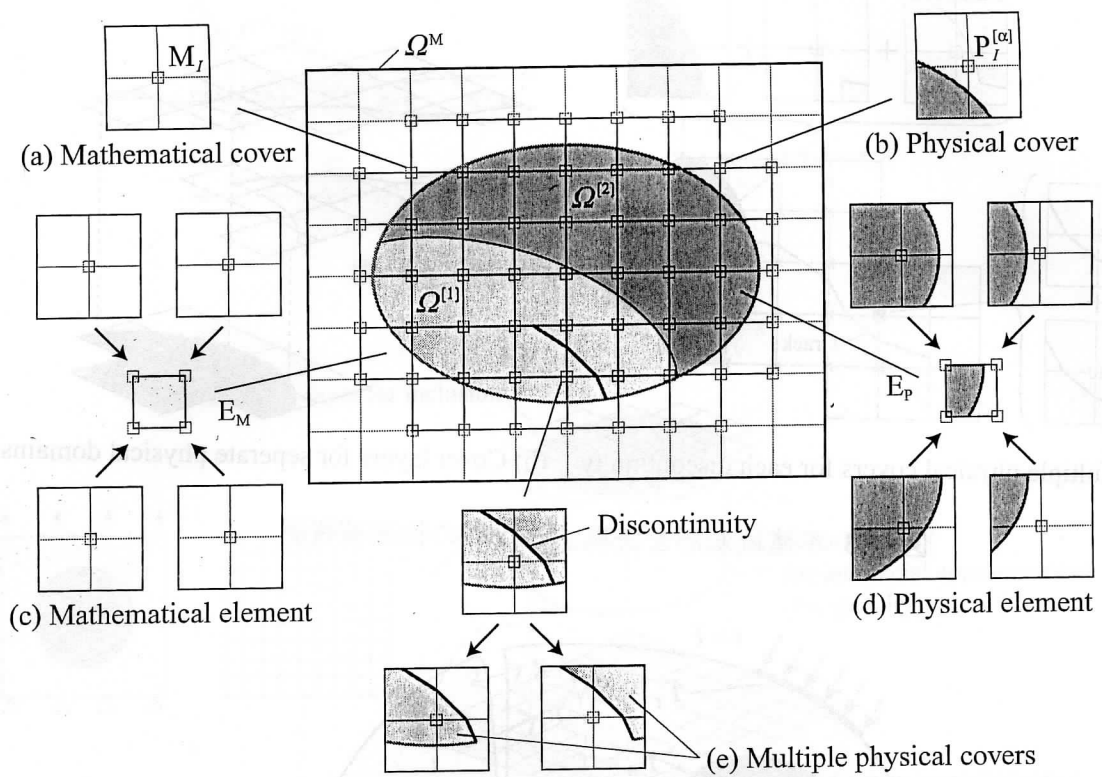


図-4.1 有限被覆法における「被覆」と「要素」

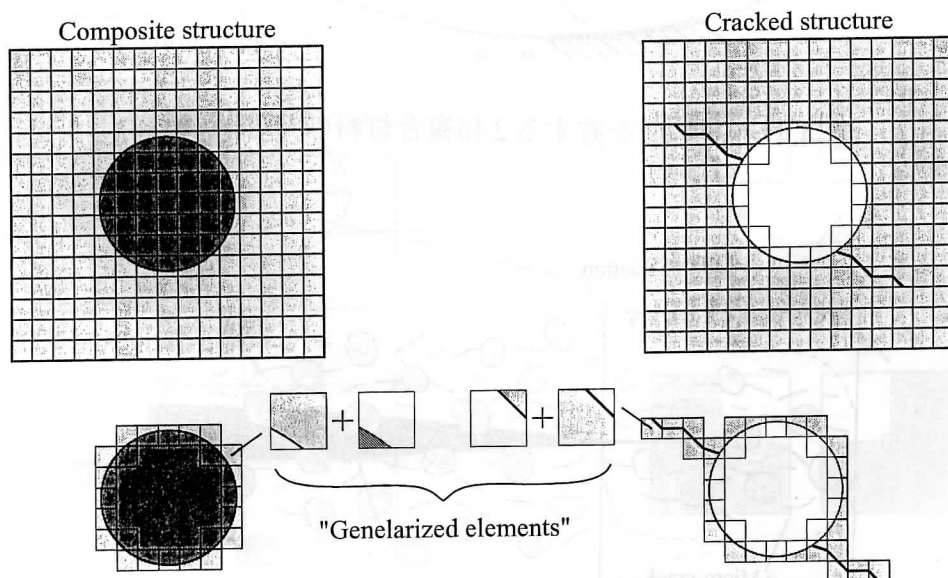
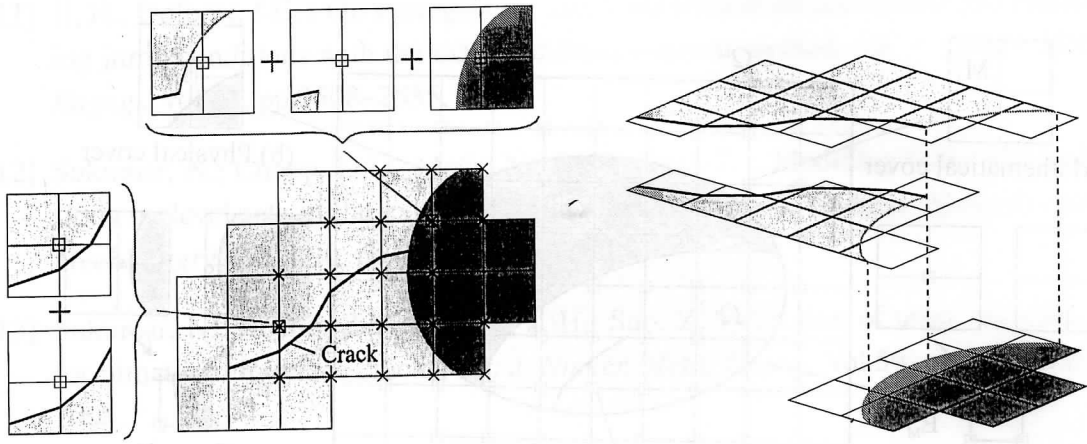


図-4.2 要素内に部分的に物理領域を有する「一般化要素」



(a) Multiple physical covers for each discontinuity (b) Cover layers for separate physical domains

図-4.3 不連続変形を表現するための物理被覆層

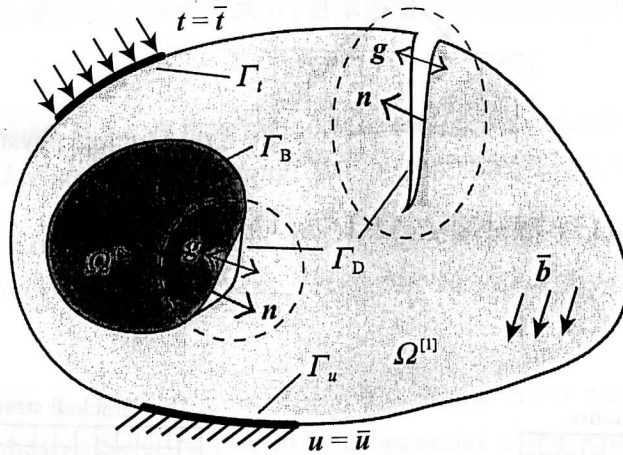


図-4.4 不連続面を有する2相複合材料の物理問題

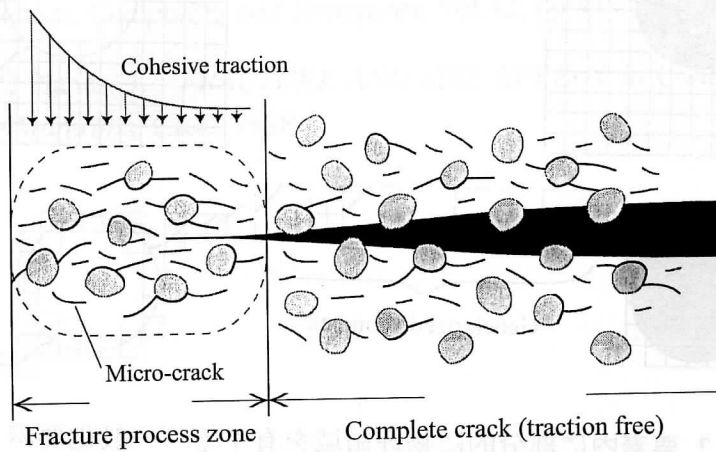


図-4.5 準脆性材料における破壊進行領域と仮想ひび割れ (Cohesive crack)

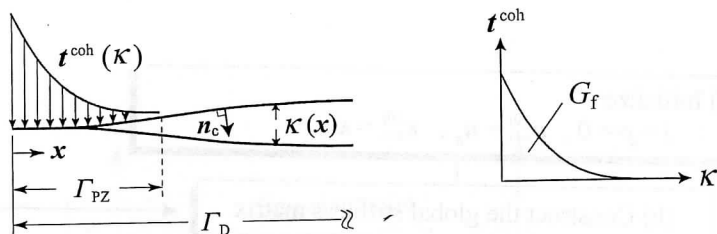


図-4.6 Cohesive crack モデル

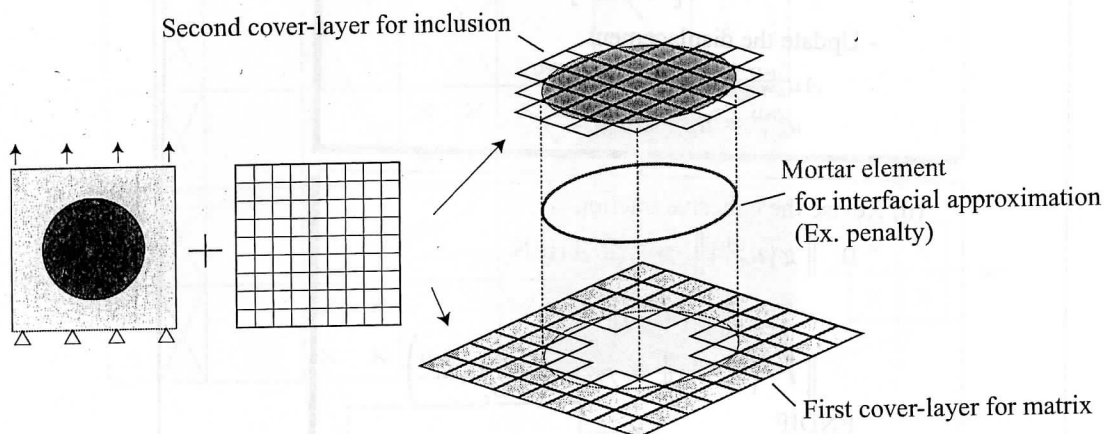
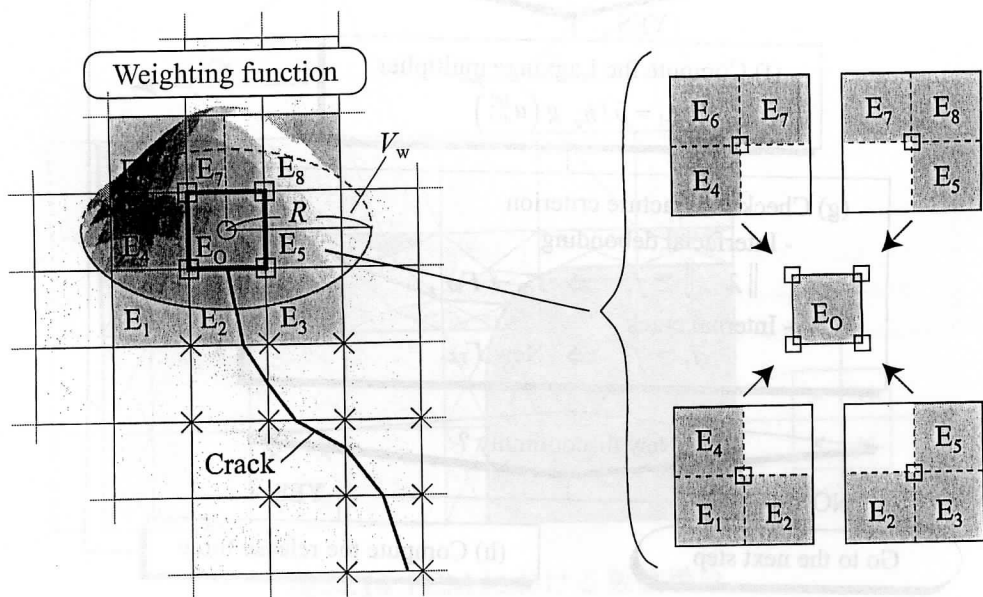


図-4.7 定型メッシュと FCM による 2 相複合材料のモデル化



(a) Schematic of weighted average for an element

(b) Support of weighting function

図-4.8 ひび割れ発生の判定基準に用いる応力

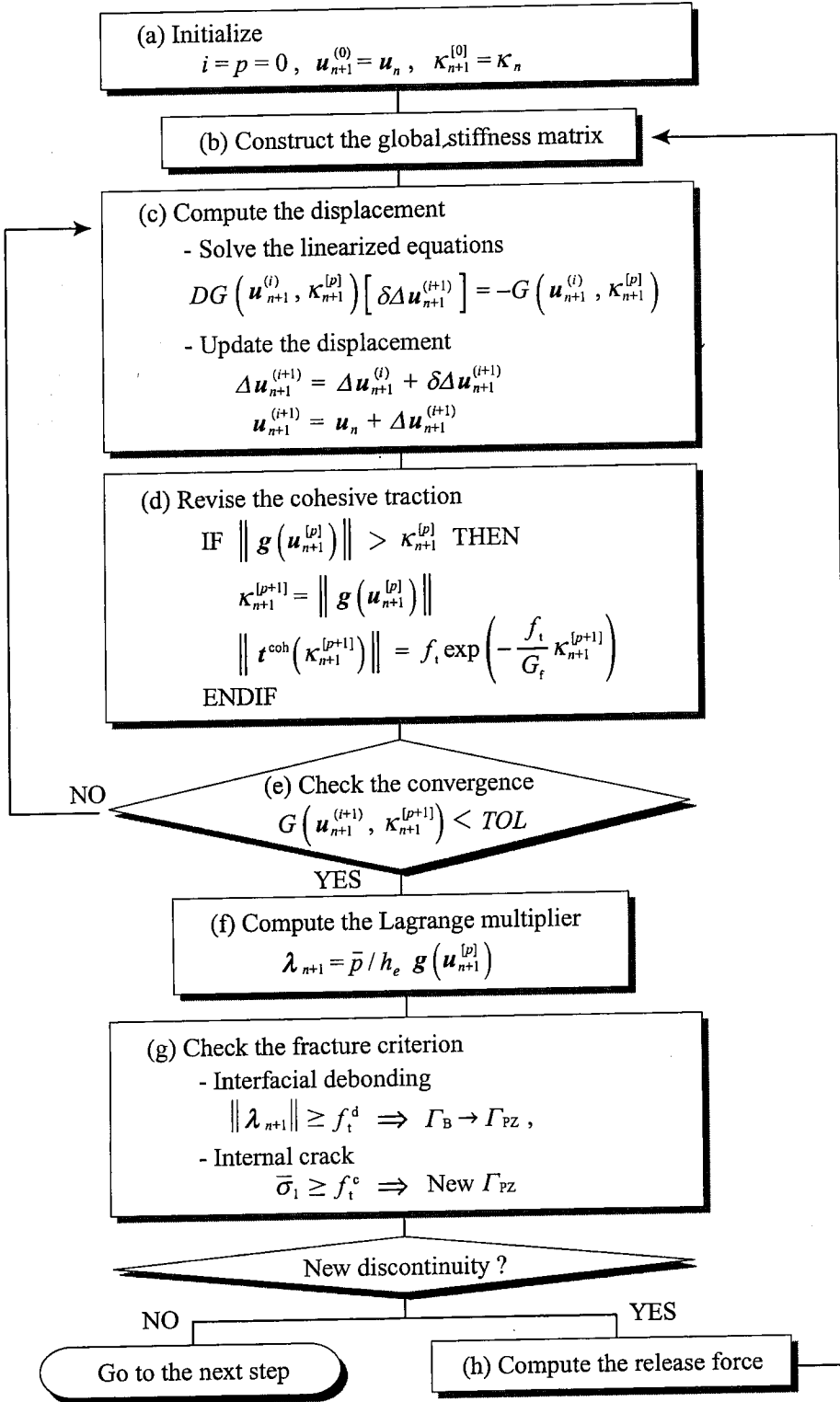


図-4.9 不連続面進展解析アルゴリズム

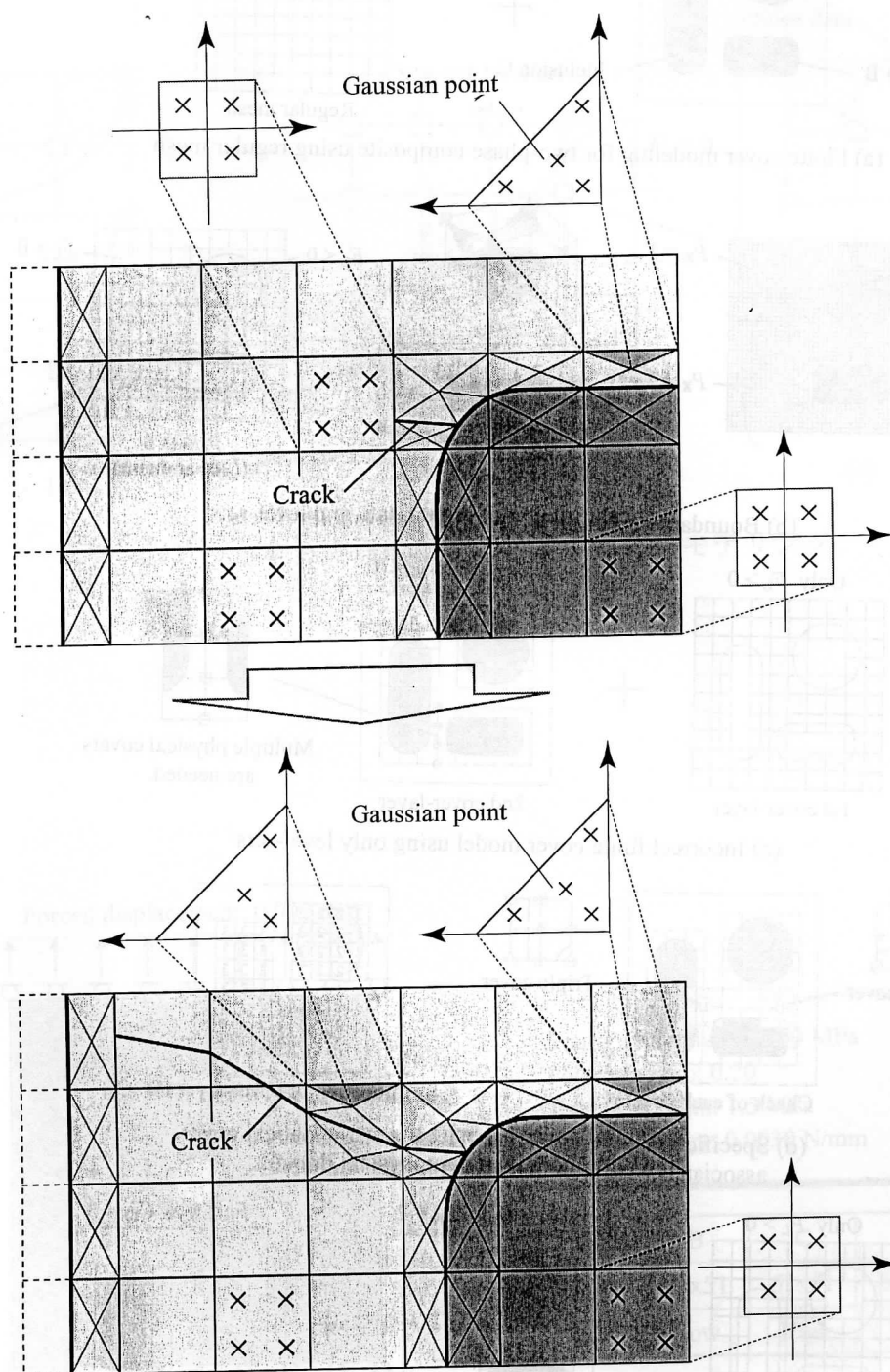


図-4.10 FCM における数値積分

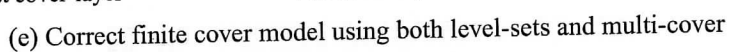
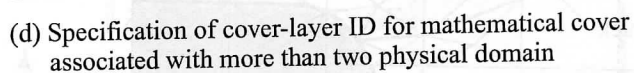
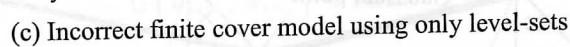
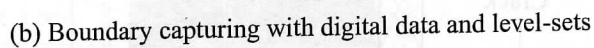
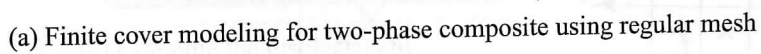


図-4.11 非均質材料に対する多重被覆モデリング

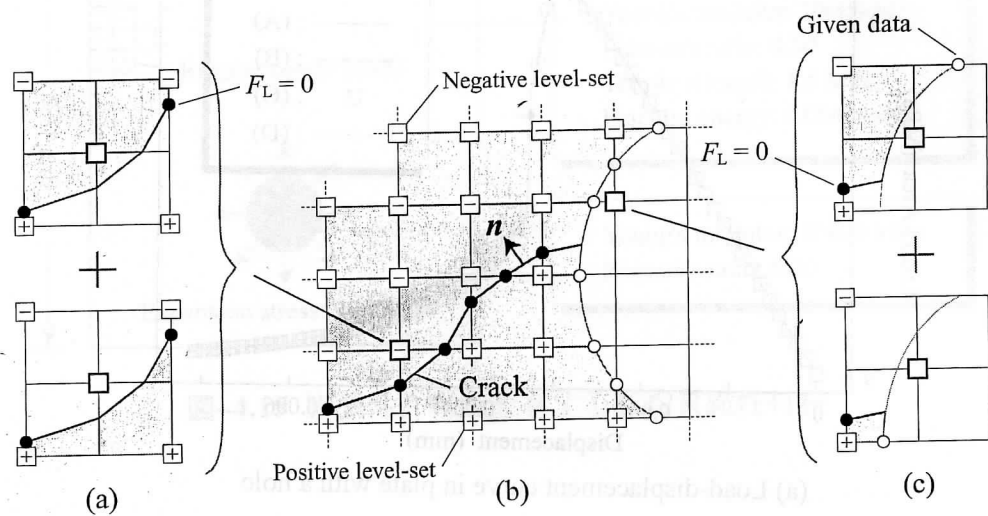
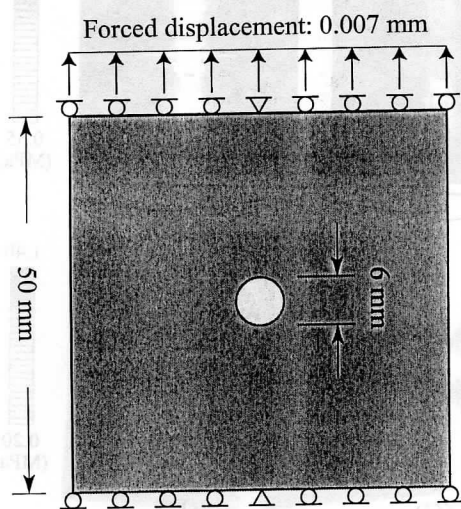


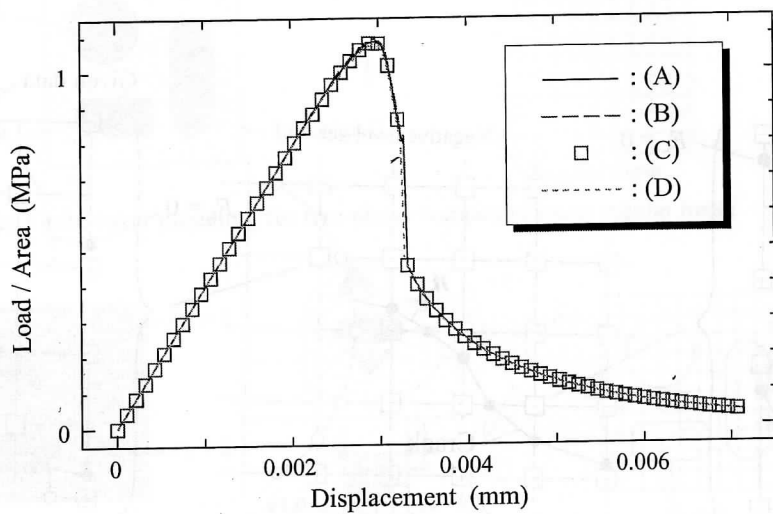
図-4.12 ひび割れ進展解析における多重被覆モデリング



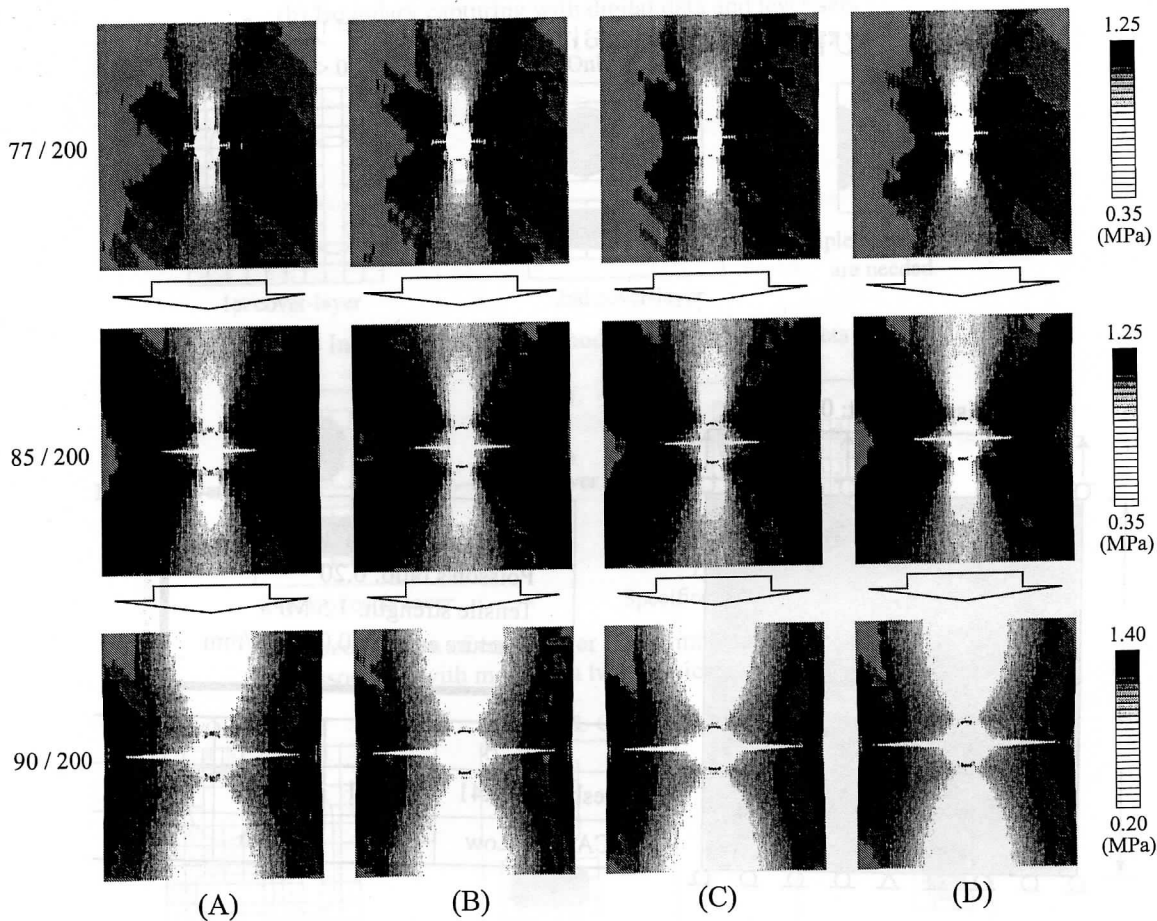
Young's modulus: 20000 MPa
Poisson's ratio: 0.20
Tensile strength: 1.5 MPa
Fracture energy: 0.0030 N/mm

	A	B	C	D
Mesh	41x41	51x51	51x51	61x61
FCA	Low	Low	High	Low

図-4.13 脆性材料で構成される円孔穴あき板



(a) Load-displacement curve in plate with a hole



(b) Cracked configuration with von-Mises stress distribution in plate with a hole

図-4.14 円孔穴あき板における変形図と von-Mises 応力分布

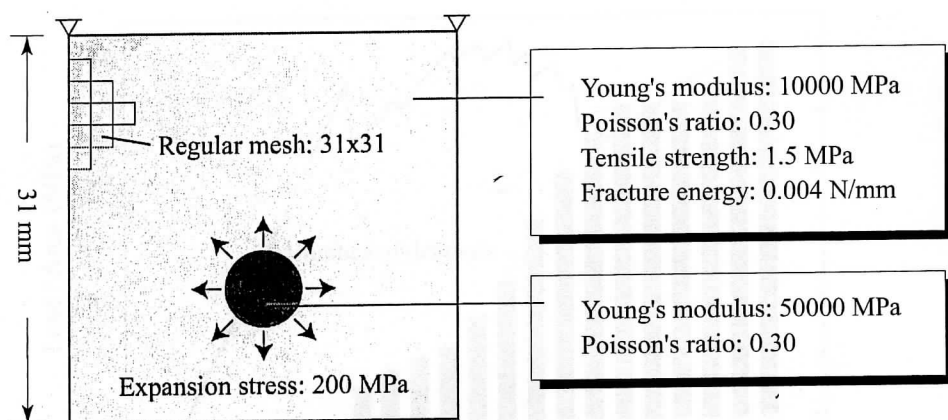


図-4.15 膨張性介在物を有する非均質脆性材料

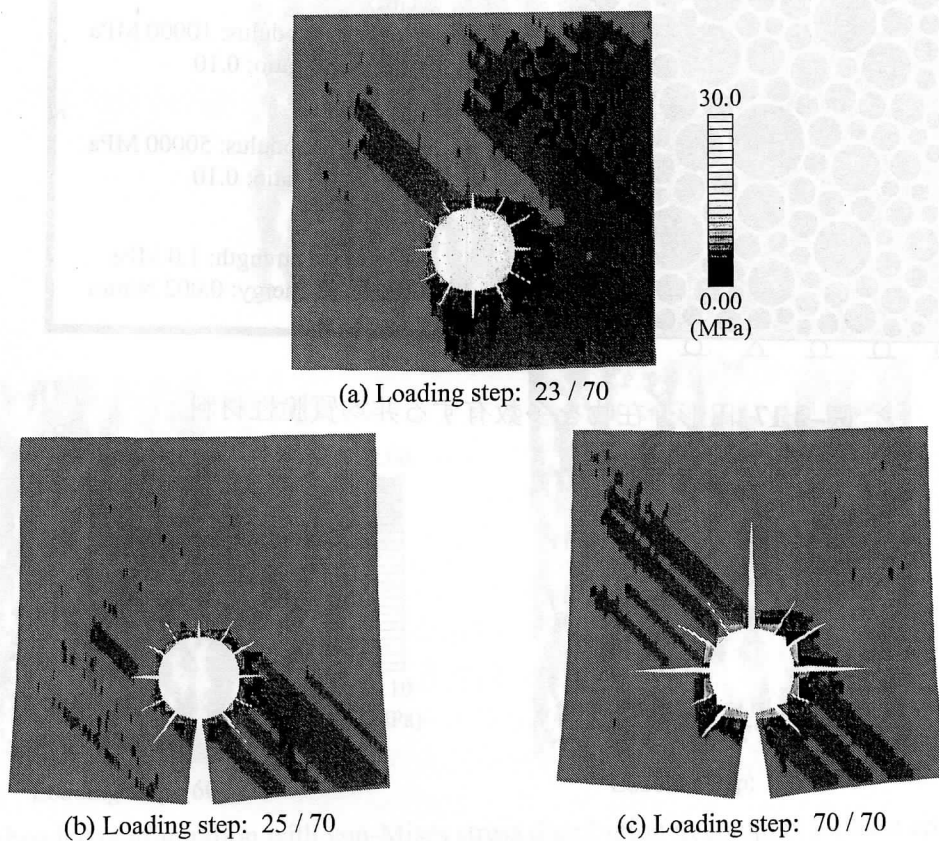


図-4.16 介在物の膨張による非均質材料の変形図と von-Mises 応力分布

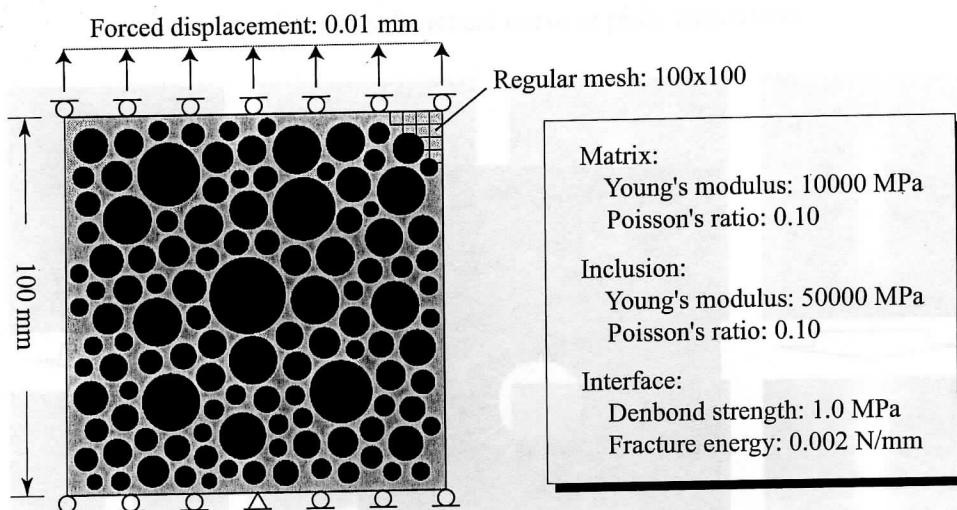
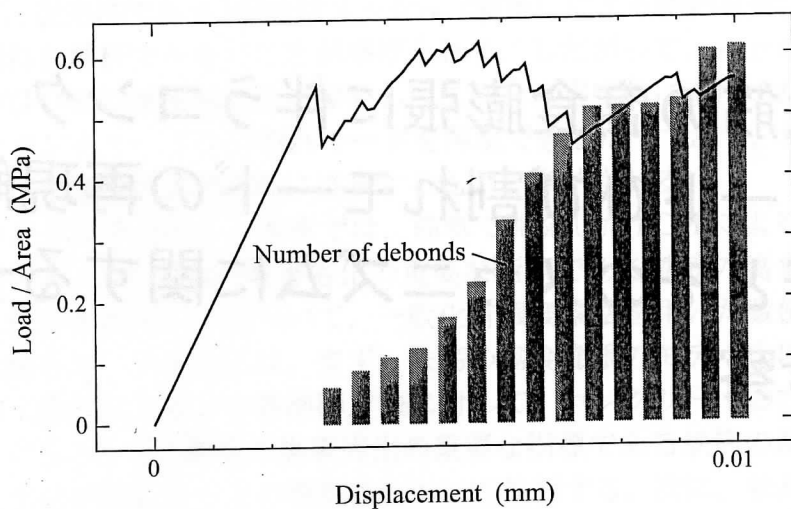
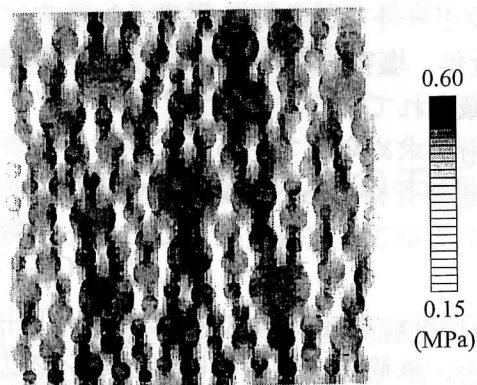


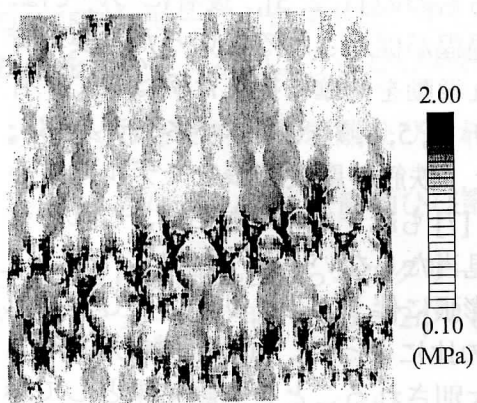
図-4.17 円形介在物を多数有する非均質脆性材料



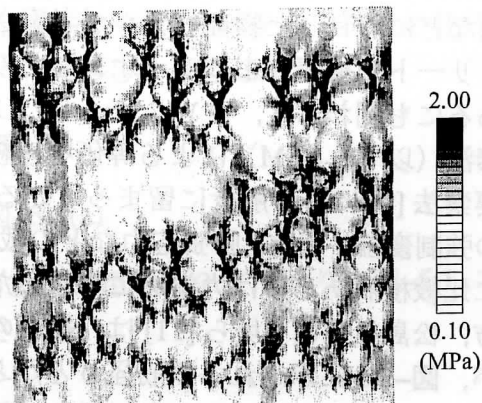
(a) Load-displacement curve in complex 2-phase composite



Loading step: 20 / 100



Loading step: 60 / 100



Loading step: 100 / 100

(b) Debonded configuration with von-Mises stress distribution in complex 2-phase composite

図-4.18 介在物を多数有する非均質脆性材料の界面剥離進展の解析結果

第5章 鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現解析とそのメカニズムに関する一考察

5.1 はじめに

社会的重要度の高いコンクリート構造物は、従来メンテナンスフリーとして扱われていた。しかしながら、近年、塩害・アルカリ骨材反応・凍害などによってコンクリートは劣化することが認識されており、メンテナンスのタイミングをはかるために、その時期を予測する技術が求められている。なかでも塩害は、鉄筋コンクリート（以下、RC）構造物の最重要骨格である鉄筋を腐食劣化させることに加えて、かぶりコンクリートの剥落による第3者被害を招くことから、特にその予測技術の構築が重要視されている。

塩害劣化に関する既往の研究は、主にかぶりコンクリート中における塩化物イオン拡散過程を解析するものと、鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートの力学的な損傷過程を解析するものに大別される。前者は、コンクリートの内部構造や分子・イオンの移動などに着目した物理モデルが考案されているものの [1, 2, 3]、後者については、コンクリートの損傷によってイオンなどの拡散過程が促進されるといった重要な背景があるにも関わらず、コンクリートのひび割れ挙動を的確に捉えた例はなく、有限要素法（以下、FEM）による等価不連続体解析 [4, 5, 6, 7] や剛体バネモデル [8]・境界要素法 [9] による解析に留まっている。また、鉄筋の腐食膨張をモデル化するための強制変位・荷重・膨張応力などの载荷方法 [7] も統一されておらず、これらを適切に比較検討あるいは力学的に考察した例も見当たらない。

他方、松島ら [10]・堤ら [11] は、鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れ経路が、図-5.1 に示される鉄筋径 ϕ とかぶり t_b の比によって、(a) 鉄筋軸ひび割れ、(b) 表面剥離ひび割れ、(c) 水平剥離ひび割れに大別されることを実験結果として示しており、かぶりコンクリートの剥落を招く剥離ひび割れのモードが劣化進行速度や第3者被害にとって重要であることを指摘している。捉え方を変えれば、塩害劣化の数値解析では、このひび割れモードを再現しなければ力学的に正しいモデル化をしたとは言えず、当然にひび割れモードを再現可能な鉄筋の腐食膨張のモデル化とコンクリートのひび割れ挙動のモデル化が検討されなければならない。しかしながら、このひび割れモードの発現に関しては、松島・堤らの弾性論に基づく簡易的

な分類に留まっており、数値解析によってこれらを再現・分類した例はない。その一因として、従来法である FEM はメッシュ（要素）による制約を受け、任意に成長するひび割れを解析できないことが挙げられる。したがって、メッシュに依存しない高精度のひび割れ進展解析法を開発し、これを塩害劣化に適用すれば、松島・堤らが示したコンクリートひび割れモードを再現できるはずであり、塩害による RC 構造物の劣化予測技術は飛躍的に進歩するものと期待される。

以上のような背景から、本章では、前章で開発した FCM によるひび割れ進展解析法を用いて、RC 構造の塩害劣化の重要な指標である鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードについて、一般化有限要素法を用いた数値解析による分類と再現を試みる。具体的には、まず、鉄筋の腐食膨張のモデル化における、強制変位・荷重・膨張応力などの各制御方法に対して、コンクリートのひび割れ挙動を考察するとともに、RC 構造の塩害劣化の重要な指標である鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現性について検討する。次に、松島・堤らが実験で示したコンクリートひび割れモードの再現解析を試み、各ひび割れモードの発現機構やひび割れ形成メカニズム・劣化進行速度などについて考察する。最後に、これらの結果をふまえて、死荷重が作用する実構造物を模擬した数値解析例を示し、塩害劣化における使用環境の影響についても考察する。

5.2 ひび割れモードの分類と材料のモデル化

5.2.1 ひび割れモードの分類

松島ら [10] と堤ら [11] は、塩害による鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れモードに着目し、弾性論による簡易的な検証を行った後、電食実験と静的破砕材による膨張試験によって図-5.2 に示されるような鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れモードを再現した。そして、鉄筋径 ϕ とかぶりパラメータ D の比である D/ϕ を用いて、次のようにひび割れモードを定義した（図-5.1 参照）。

- $1.5 \leq D/\phi < 3.0$: 剥離ひび割れ, 図-5.1(b)
- $D/\phi \geq 3.0$: 鉄筋軸ひび割れ, 図-5.1(a)

ここで、 D は鉄筋中心からコンクリート表面までの距離の 2 倍であり、図-5.1 に示されるパラメータを用いて $D = 2t_p + \phi$ で表される。

5.2.2 コンクリートのモデル化

松島ら [10] と堤ら [11] の研究では、現地調査や供試体実験においてコンクリート中の骨材がひび割れモードに及ぼす影響については言及されておらず、彼らの実験結果を模擬した図-5.2 を見ても、骨材の影響がひび割れモードの発現に対して、直接的に影響を与えているようには見受けられない。そこで本研究では、ひび割れモー

ドの形成に対して骨材の影響は軽微であると考え、以下ではコンクリートを均質体と見なし解析を行う。

5.2.3 鉄筋の腐食膨張のモデル化

コンクリートのひび割れモードを再現するには、鉄筋の腐食膨張を的確にモデル化することが重要となる。既往の研究においては、強制変位 [4] や弾性体としての鉄筋への膨張ひずみ [6] を付加する解析が大多数を占めている。これに対して、堤ら [11] の実験で観察された鉄筋周りのコンクリートひずみ分布を模式的に描いた図-5.3を見ると、かぶりコンクリートが小さいとかぶり側に大きくひずみ、かぶりが大きくなると等方的にひずむ様子が見てとれ、腐食生成物の Young 率が小さいとする既往の研究報告 [12] とも合致する。したがって、腐食膨張によってかぶりの違いを数値解析上で自然に表現するためには、鉄筋の腐食膨張過程は荷重や膨張応力を与えてモデル化するのが妥当であると考えられる。しかしながら、これまでその妥当性を検証した報告例は見当たらない。

そこで本研究では、以上のような腐食膨張のモデル化による影響を次節において調査するため、図-5.4(a)～(c)に示される分布荷重・膨張応力・強制変位の基本的な3ケースを用いて鉄筋の腐食膨張をモデル化しておく。それぞれの詳細は以下の通りである。

- (a) 腐食膨張を分布荷重でモデル化する。この場合、単純なコンクリートの円孔穴あき問題となり、円孔表面に等分布荷重を与えることになる。すなわち、弱形式 (4.15) における右辺項の \bar{t} のみを制御する簡易なモデル化である。
- (b) 腐食生成物を弾性体と仮定し [12]、腐食膨張を腐食生成物自身の膨張作用としてモデル化する。腐食生成物の Young 率を考慮し、弱形式 (4.15) の右辺に熱膨張と同様の項を追加する。

$$F_{\text{exp}} = \int_{\Omega^{\text{cor}}} \nabla \delta \mathbf{u} : \mathbf{c}_{\text{cor}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{cor}} d\Omega = \int_{\Omega^{\text{cor}}} \nabla \delta \mathbf{u} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{cor}} d\Omega \quad (5.1)$$

ここで、 Ω^{cor} は鉄筋の物理領域、 \mathbf{c}_{cor} は腐食生成物の弾性テンソル、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{cor}}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{cor}}$ はそれぞれ膨張ひずみテンソル、膨張応力テンソルであり、熱膨張と同様に対角成分のみを考慮する。

- (c) 腐食膨張を強制変位（ギャップ変位）でモデル化する。Augmented Lagrangian アルゴリズム [13] に従い、図-5.4(d)に示されるように、鉄筋表面とコンクリート表面の間に法線方向と接線方向のペナルティバネを定義して、ギャップ変位 g_{cor} を法線方向に強制的に作用させる。このモデル化は、既往の研究でしばしば行われている変位制御による有限要素解析を想定したものである。

5.3 腐食膨張のモデル化に関する数値実験

本節では、図-5.4 に示したそれぞれの腐食膨張モデルに対するコンクリートのひび割れ挙動や、ひび割れモードの再現性について検討する。

5.3.1 解析対象と解析条件

鉄筋の腐食膨張モデルの検討に用いる解析モデルは、図-5.5 に示される構造形態とし、3 ケースの腐食膨張モデルに対してかぶりの異なる 2 ケースの RC モデルを対象とする。ここで、(X) は剥離ひび割れを、(Y) は鉄筋軸ひび割れを想定した RC モデルであり、腐食膨張モデルは、分布荷重を p 、膨張応力を e 、強制変位を g と略記する。すべてのケースにおいて重力は考慮せず平面ひずみ状態を仮定し、鉄筋の腐食膨張においては、腐食減量などは無視して法線方向かつ等方に単純載荷するものとする。また、膨張応力を制御するケースでは、既往の文献 [12] を参考に腐食生成物の Young 率を設定し、材料境界では連続条件を満たしながら膨張させることとする。

本解析では純粋なひび割れモードを再現するために、モデル (X) と (Y) において、鉄筋形状や解析条件をまったく同一とした。特に、鉄筋周りの一般化要素の形状まで同一であり、かぶりすなわち鉄筋位置のみが純粋に異なることを強調しておく。なお、荷重制御法（分布荷重 p ）ではひび割れが外部境界に達すると解析が破綻するので、その寸前までを数値シミュレーションの対象とする。

5.3.2 線形解析による基礎検討

ひび割れ進展を伴う非線形解析を行うに先立ち、ひび割れの発生を考慮しない線形解析による各腐食膨張モデルの基礎検討を行う。変形図を含む応力のコンター図と、鉄筋周りにおける応力の詳細を表したレーダー分布を図-5.6 に示す。ここで、応力は式 (4.28), (4.29) で表される重み付き平均応力の最大主応力 σ_1 、すなわち本解析におけるひび割れ判定応力である。したがって、この値の大きい位置からひび割れが形成されていくことになる。

まず、分布荷重のケースと膨張応力のケースは、モデル (X) と (Y) の両方においてほぼ同様の応力分布となっており、強制変位のケースのみ異なった応力分布となっている。また、すべてのケースに共通して、かぶりが大きいモデル (Y) の方が顕著な応力のレーダー分布となっており、ひび割れの発生箇所や進展経路を予測しやすいものと考えられる。図-5.2 のひび割れモードと関連付けると、線形解析の範囲内で、モデル (Y)- p と (Y)- e は鉄筋軸ひび割れを、モデル (X)- g と (Y)- g は表面剥離ひび割れを示すであろうことが予想される。

5.3.3 各腐食膨張モデルに対するひび割れ進展解析結果と考察

すべてのケースに対してひび割れ進展を含む非線形解析を行い、その結果得られたひび割れ分布を図-5.7に、また各ケースのひび割れモード発現時の変形・応力分布を図-5.8に示す。

まず、各ケースにおけるひび割れの経路は、図-5.6の応力のレーダー分布とほぼ同様の傾向であることが分かる。特に、かぶりの大きいモデル(Y)では、鉄筋の腐食膨張のモデル化に依らず、ひび割れの形成がレーダー分布の形状と類似しており、レーダー分布から予測可能なひび割れモードが示されている。

次に、各腐食膨張モデルに対するコンクリートのひび割れ挙動について考察する。最も単純な分布荷重によるモデル化では、モデル(X)で剥離ひび割れが、モデル(Y)では軸ひび割れが見られ、かぶりの大小によるコンクリートのひび割れモードを再現している。すなわち、かぶりの大小によるコンクリートの拘束の違いをひび割れ進展解析に反映することができている。しかしながら、このモデル化における弱形式では、腐食膨張による分布外力項に加えて式(4.14)の Cohesive crack モデルにおける結合力の項を同時に扱うことになるので、対称性の乱れや境界へのひび割れの到達による解析の破綻を生じることとなり不安定な数値解析となってしまう。

鉄筋の腐食膨張を腐食生成物による膨張作用とみなして膨張応力を制御するモデル化では、腐食生成物の Young 率を仮定する必要があるが、分布荷重のケースと同様にかぶりの大小によるコンクリートの拘束の違いを捉えることができ、ひび割れモードが精度よく再現されている。これは、腐食生成物の Young 率を小さく設定したことにより、分布荷重とほぼ等価な解析となることに起因しており、分布荷重 p による検討結果も踏まえると、鉄筋の腐食膨張は荷重を制御するモデル化が妥当であることを示唆している。さらに、膨張によるモデル化は数値解析の安定性に優れていて、分布荷重のケースとは異なり、ひび割れ形成の対称性が保たれている。また、このモデル化による数値解析では、腐食生成物とコンクリートの境界は接合されているので、ひび割れが境界に達することによる解析の破綻も誘発しにくく、腐食量とひび割れ幅の検討に対する応用なども期待される。ただし、腐食生成物の Young 係数を大きくし過ぎると、後述するギャップ変位を与える変位制御型の解析と等価になってしまう。

一方、鉄筋とコンクリートの界面にギャップ変位を与えるモデル化では、ひび割れモードを正確に表現しておらず、図-5.6の応力のレーダー分布に沿ったひび割れ進展を再現するに留まっている。変位制御型の解析では、かぶりコンクリートの構造形態とは無関係に変形を規定してしまうので、数値解析を安定に実行することができるが、かぶりの大小による拘束の違いなどを解析に反映しにくく、ひび割れモードの再現には至っていない。したがって、変位制御型の解析では前の2ケースとは異なり、かぶりなどの構造形態の違いによる幾何学的な情報だけで適切なひび割れ進展を解析することは困難であり、これを適用するには鉄筋径やかぶりの相違を考慮した腐食膨張変位を事前に知っておく必要がある。

以上の数値実験結果を総括すると、鉄筋の腐食膨張に対しては、かぶりコンクリートの影響を解析に反映しやすい荷重や応力を制御するモデル化が妥当であると考え

られる。ただし、分布外力を載荷する場合は数値解析の安定性に欠け、膨張応力を載荷する場合は腐食生成物の材料特性を適切に設定しなければならないことなどの注意が必要である。

5.4 鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの数値実験

本節では、前節の検討結果を考慮して、より詳細にかぶりを変化させたケーススタディを行い、図-5.1に示したコンクリートのひび割れモードの再現解析を試みる。

5.4.1 解析対象と解析条件

コンクリートひび割れモードの再現に用いる解析モデルは、図-5.9に示される構造形態とし、前節の図-5.5で用いた2つのRCモデルを含むかぶりを変化させた5ケースを対象とする。ここで、(A)、(B)は剥離ひび割れを、(C)、(D)、(E)は鉄筋軸ひび割れを想定したモデルであり、すべてにおいて重力は考慮せず平面ひずみ状態を仮定した。本例題においても、コンクリートひび割れモードを再現するために、5つのモデルすべてにおいて鉄筋形状や解析条件を同一に設定した。特に、鉄筋周りの一般化要素の形状も完全に同一であり、かぶりすなわち鉄筋位置のみが純粋に異なるものであることを強調しておく。なお、本再現解析では前節の検討結果を踏まえて、鉄筋の腐食膨張モデルは荷重制御法（分布荷重 p ）を採用し、ひび割れが外部境界に達して解析が破綻する寸前までを解析の対象とする。

5.4.2 線形解析による簡易評価

ひび割れ進展を伴う非線形解析を行うに先立ち、線形解析による簡易的な予測を目的として、荷重ステップ $1/400$ における鉄筋周りのひび割れ判定応力の分布を図-5.10に示す。コンクリートひび割れモードに関連するパラメータ D/ϕ が大きくなるにつれて応力分布が十字形に近づくことが示されており、鉄筋軸ひび割れを起こす変形状態に推移していくことが分かる。モデル(D)と(E)の結果から、鉄筋軸ひび割れを起こすであろうことが予想されるが、モデル(A)～(C)がどのようなひび割れモードを示すかはここでの線形解析だけで判断できない。

5.4.3 ひび割れ進展解析結果と考察

5ケースともに同一の解析条件を設定してひび割れ進展を含む非線形解析を行った。ひび割れ進展の結果を図-5.11に、ひび割れモードの発現時における変形・応力分布を図-5.12に示す。ここで、本解析ではすべてのモデルに対して同じ荷重・同じ

解析ステップ数を与えているので、図中の荷重ステップは、腐食膨張の開始を時刻 $t = 0$ としたときの時間の経過とみなすことができる。

まず、全体の傾向として、 $D/\phi = 3$ 付近を境界に (A), (B) では剥離ひび割れを、また (C), (D), (E) では鉄筋軸ひび割れを形成しており、堤ら [11] が実験で確かめたひび割れモードを再現されている。また、(D) と (E) では線形解析で鉄筋軸ひび割れを簡易的に予測した通りに鉄筋軸ひび割れを形成したのに加えて、線形解析では判断できなかった (A)～(C) についてもこの非線形解析によってひび割れモードを分類できている。本解析では等方的に腐食膨張が発生すると仮定しているので、解析初期の段階では全体を通して放射状にひび割れが複数発生するが、その後はかぶりの影響を反映したひび割れのモードが選択的に発展する現象が適切に捉えられている。そして、これらのひび割れ形成は、実験結果を模式的に示した図-5.2 と良好な一致を見ることができる。

次に、剥離ひび割れを示した図-5.11(A)(B)を見ると、かぶりの大きいモデル (B) の方が (A) よりも剥離の幅が広がっている。これは、剥離ひび割れを起こすかぶりの範囲内では、かぶりが大きくなるほど剥落するコンクリート量が増すことを意味する。また、時間の経過と同義である荷重ステップを見ると、かぶりの小さいモデル (A) の方が早期にひび割れがコンクリート表面に達している。したがって、かぶりが小さいほどかぶりコンクリートが剥落する時期が早く、塩害の劣化機構が促進されやすくなるという判断が可能であろう。

他方、鉄筋軸ひび割れを示した図-5.11(C)～(E)を見ると、剥離ひび割れのケースと比較して、ひび割れの発生機構が異なっている。かぶりが小さいモデル (C) では鉛直下向き（かぶり方向）に主にひび割れが進展するのに対して、最もかぶりの大きいモデル (E) ではかぶりの反対側にも鉛直上向きにひび割れが進展する。これは鉄筋周辺のコンクリートによる拘束が等方的になるからである。一方、これらの中間に位置するモデル (D) では、はじめに水平方向にひび割れが進展した後、コンクリート表面がはらみ出し、鉄筋とコンクリート表面の両方向から軸ひび割れが形成される。さらに、このかぶりのケースにおいては、鉄筋の軸ひび割れと同時に図-5.1(c) の水平剥離ひび割れをも伴う可能性が示され、劣化の促進に加えてかぶりコンクリートの剥落も併発することが予見される。

また、ひび割れ形成の発生時期については、(A) が最も早く、(E) が最も遅いことから、かぶりが大きいほどひび割れ発生時期が遅いことが分かる。ただし、モデル (D) では荷重ステップが 277 付近においてひび割れ形成が急速に進むのに対して、モデル (E) では (D) よりも段階的にひび割れ形成が進んでおり、ひび割れ形成のメカニズムの相違も劣化の進行速度に影響すると考えられる。したがって、劣化の進行を予測する際には、かぶりの違いなどの構造形態のみを単純に用いるのではなく、ひび割れ進展などの力学現象やそこに内在するメカニズムも考慮する必要がある。

以上、本節では鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードを再現し、さらにその発生機構や進展時期について考察した。特に、本例題においては「鉄筋位置」といった幾何学的情報のみで、ひび割れの形成や進展時期が大きく異なることを指摘した。塩害劣化においては、このようなひび割れ経路やひび割れ進展時期の

相違は、言うまでもなく重要案件であり、本研究で構築したような力学挙動を適切に再現し得る解析手法を導入することによって、より高精度なコンクリートの劣化予測技術を築き上げることができると考えられる。

5.5 使用環境を考慮した数値解析例

本章では、死荷重が作用する実構造物中での塩害劣化を想定したブーミング的な解析による数値実験を行い、使用環境の影響について考察する。

5.5.1 解析対象と解析条件

解析対象は、図-5.13に示されるような鉄筋コンクリート製のラーメン橋脚とし、主に圧縮を受ける位置Pとせん断と引張りを受ける位置Qでの局所領域におけるせん断補強筋（帯鉄筋）の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れ進展を平面ひずみ条件下で解析する。なお、本章では全体構造における初期の変形状態の影響に着目し、鉄筋とコンクリートの厳密な連成はモデル化していない。

解析手順および解析方法について述べる。はじめに、全体構造の線形解析を行い位置PとQの変形量を求めておく。次に、その全体構造の変形量を初期条件として局所構造に与えた後にFCMによるひび割れ進展解析を行うものとする。したがって、局所構造の解析におけるひび割れ判定やつり合い判定は、局所構造の変形量にあらかじめ求めておいた全体構造の変形量を加えたものを用いることになるので、本解析は単方向の簡易的な連成問題をモデル化したことになる。なお、腐食膨張と局所構造の解析モデルは、前章のモデル(B)-eと同様とした。

5.5.2 解析結果と考察

全体構造の解析結果を図-5.14に、局所構造PとQの解析結果をそれぞれ図-5.15と図-5.16に示す。

図-5.15と図-5.16に示されるように、ここで設定した局所構造は、前章のような拘束のない状態では軸ひび割れを示したが、構造物中での変形状態（使用環境）をモデル化した本例題では単純に軸ひび割れとはなっていない。まず、位置Pでは鉛直方向に圧縮を受けるので、水平方向にはひび割れはほとんど進展せずに、主に鉛直方向にひび割れが進展して、少なからず拘束の弱い自由境界の方向にも向かっている。次に、位置Qでは水平方向の引張りとせん断を受けているので、斜め方向にひび割れが進展してかぶりコンクリートの剥離・剥落を招く兆候を示している。さらに、本章では1つの領域における鉄筋の腐食膨張を想定したが、隣接する鉄筋も同様に腐食膨張する場合を考えると、それぞれの腐食膨張によるひび割れが連結して、図-5.1(c)のような水平剥離ひび割れとなることが予想される。また、これらの数値解析結果は、使用環境がかぶりコンクリートの剥落時期や剥落幅に影響することとも示唆している。

本章における数値実験は、構造物中での塩害劣化に対する簡易的なモデル化ではあるが、ひび割れの形成は全体構造の変形履歴や周囲の拘束および自由境界に影響していることから、実地的なコンクリートの劣化を解析するには構造物の使用環境を考慮したモデル化が必要であるといえる。

5.6 おわりに

塩害のようなコンクリートの劣化予測を議論する際には、化学物質の移動はもとより、力学的な膨張作用によるコンクリートのひび割れ進展は、構造物そのものの耐力低下や化学物質の拡散特性・拡散経路の変化の評価に際して軽視できない重要な現象である。それにもかかわらず、これまで精緻な力学モデルに立脚した数値解析的研究は少なく、なかでも鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れ挙動を適切に表現した例はなかった。

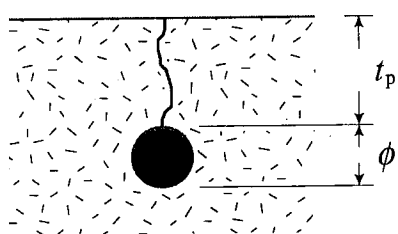
本章では、コンクリートの劣化におけるひび割れ形成の重要性に着目し、解析結果がメッシュに依存する従来の解析法ではひび割れ進展を適切に表現できないと考え、本研究で構築したFCMと定型メッシュによるメッシュ依存の少ない解析手法をコンクリートのひび割れ進展解析に適用した。そして、鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れモードの変化をはじめて数値解析で再現することに成功したことに加え、塩害をはじめとするコンクリートの劣化予測技術としての一つの枠組みを示すことができた。

さらに、実地的な塩害劣化を想定し、RC構造物の局所的な部分領域で発生するコンクリートのひび割れ進展挙動を実構造物中での塩害劣化を簡易的にモデル化し、使用環境を考慮したコンクリートのひび割れ進展について考察した。その結果、供試体実験や供試体レベルの数値シミュレーションとは異なるコンクリートのひび割れ進展挙動となることが例示され、構造物の使用環境を考慮した数値シミュレーションの有用性および劣化予測技術への応用の可能性が示された。

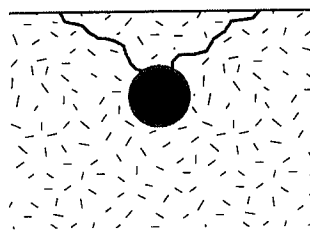
参考文献

- [1] Maekawa, K., Ishida, T., Kishi, T. : Multi-scale Modeling of Concrete Performance — Integrated Material and Structural Mechanics, *Journal of Advanced Concrete Technology*, Vol.1, pp.91–126, 2003.
- [2] 石田哲也, 前川宏一 : 物質・エネルギーの生成・移動と変形・応力場に関する連成解析システム, 土木学会論文集, No.627/V-44, Vol.44, pp.13–25, 1999.
- [3] 嶋 毅, 佐伯竜彦, 長瀧重義 : コンクリート中の物質移動に対するLBMの適用への基礎的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.23, pp.817–822, 2001.
- [4] 山田義智, 大城 武 : 破壊力学に基づくFEMによる縦ひびわれ発生腐食量の解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.15, pp.133–138, 1993.
- [5] 元 路寛, 関 博 : 離散ひび割れモデルに基づく鉄筋腐食によるひび割れ幅に関する解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.21, pp.1033–1038, 1999.
- [6] 山城建樹, 松原 仁, 伊良波 繁雄, 富山 潤 : 鉄筋の腐食膨張によるコンクリートのひび割れ進展のFMM解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, pp.133–138, 2004.
- [7] 荒木弘祐 : かぶりコンクリート剥落による第三者損傷防止を目的とした維持管理対策に関する研究, 京都大学博士論文, 2006.
- [8] 野城良祐, 中村 光, SRISOROS WORAPONG, 田邊忠顕 : 塩分浸透による鋼材腐食を考慮したRBSM解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, pp.897–902, 2004.
- [9] Farid UDDIN, A.K.M., Ohtsu, M. : Cracking mechanics due to corrosion in concrete identified by AE and BEM, *J. Materials, Conc. Struct. Pavements, JSCE*, No.760/V-63, pp.261–268, 2004.
- [10] 松島 学, 堤 知明, 関 博, 松井邦人 : 鉄筋の腐食膨張によるひびわれモード, コンクリート工学年次論文集, Vol.15, pp.133–138, 1993.
- [11] 堤 知明, 松島 学, 村上祐治, 関 博 : 腐食ひび割れの発生機構に関する研究, 土木学会論文集, No.532/V-30, Vol.30, pp.159–166, 1996.

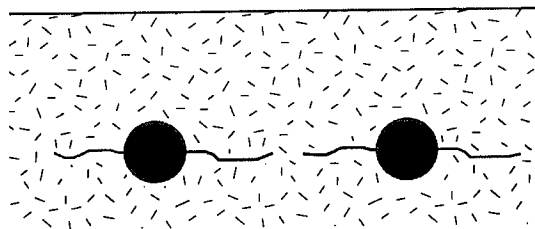
- [12] 須田 久美子, MISRA Sudhir, 本橋賢一 : 腐食ひびわれ発生限界腐食量に関する解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.14, pp.751-756, 1992.
- [13] Simo, J.C., Laursen, T.A. : An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Comput. Struct.*, Vol.42, pp.97-116, 1992.



(a) Longitudinal crack



(b) Surface peeling crack



(c) Lateral peeling crack

図-5.1 鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートのひび割れモード [?, ?]

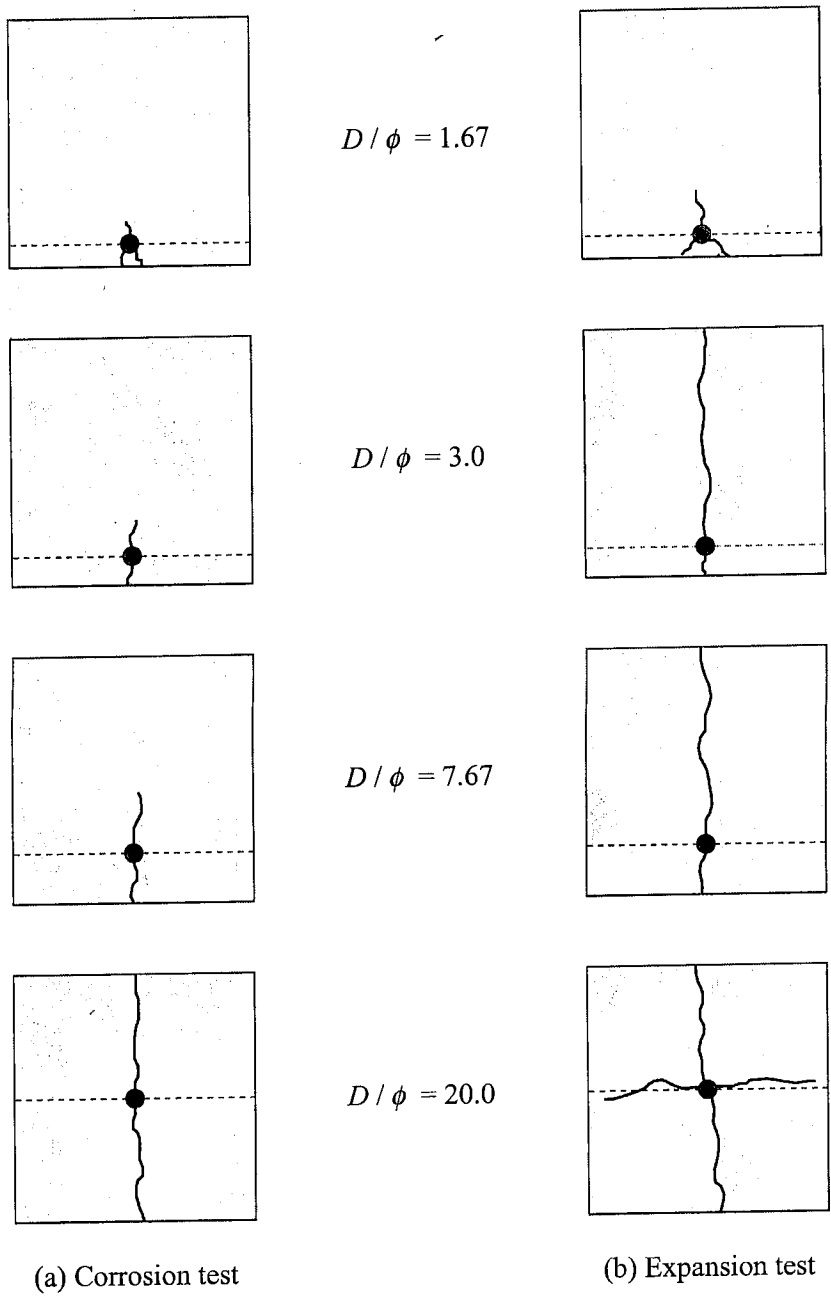


図-5.2 ひび割れモードの実験結果の模式図 [?]

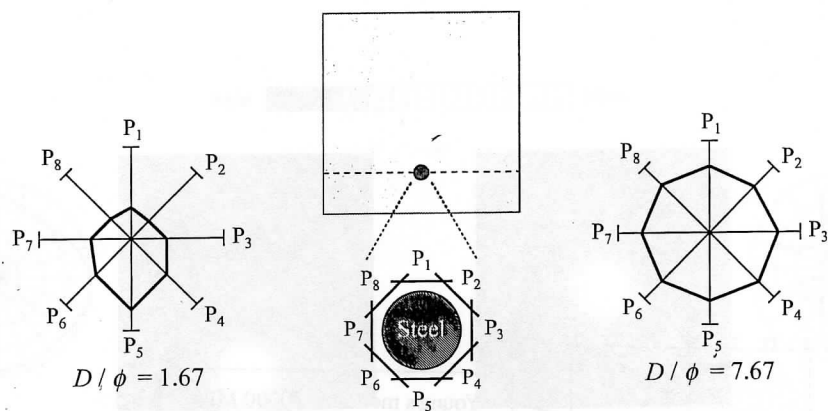


図-5.3 コンクリートひずみ分布の実験結果の模式図 [?]

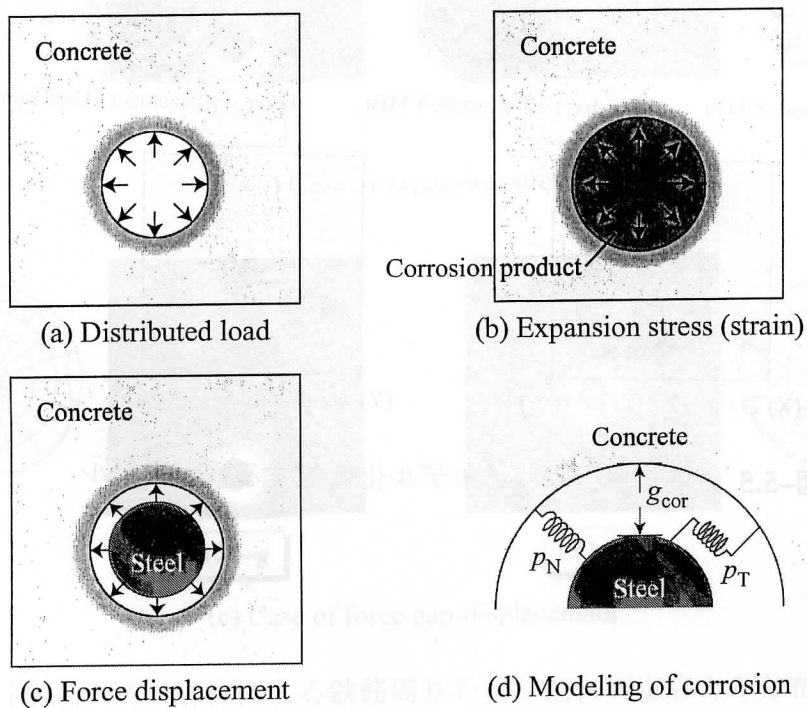
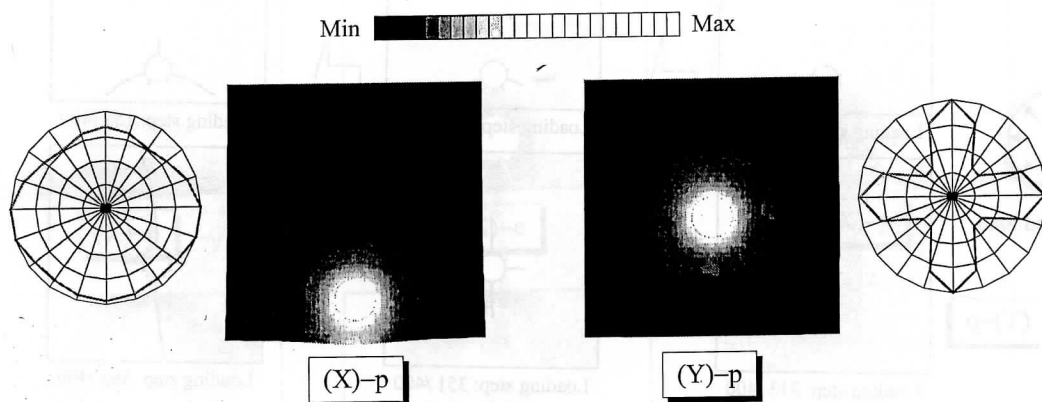
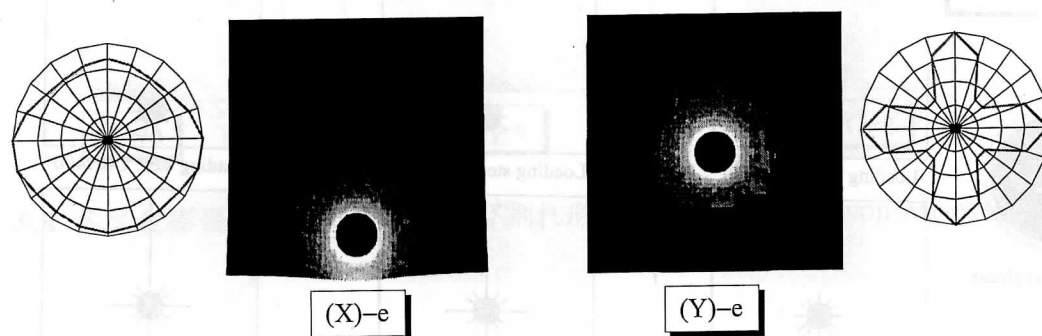


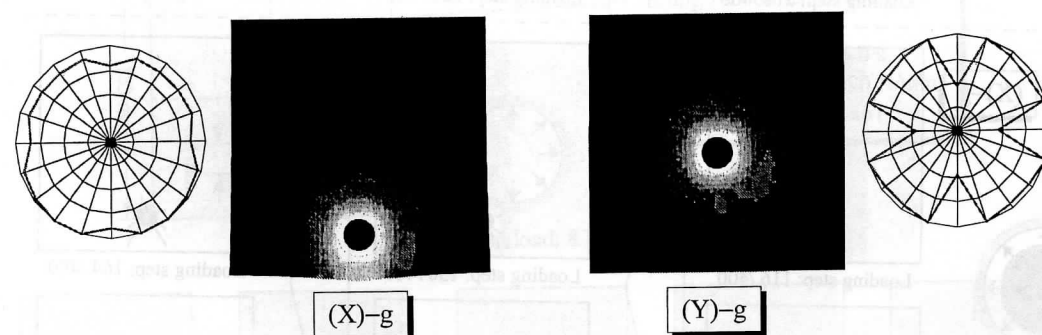
図-5.4 鉄筋の腐食膨張のモデル化



(a) Case of distributed load



(b) Case of expansion stress



(c) Case of force gap-displacement

図-5.6 線形解析による鉄筋周りのひび割れ判定応力の分布

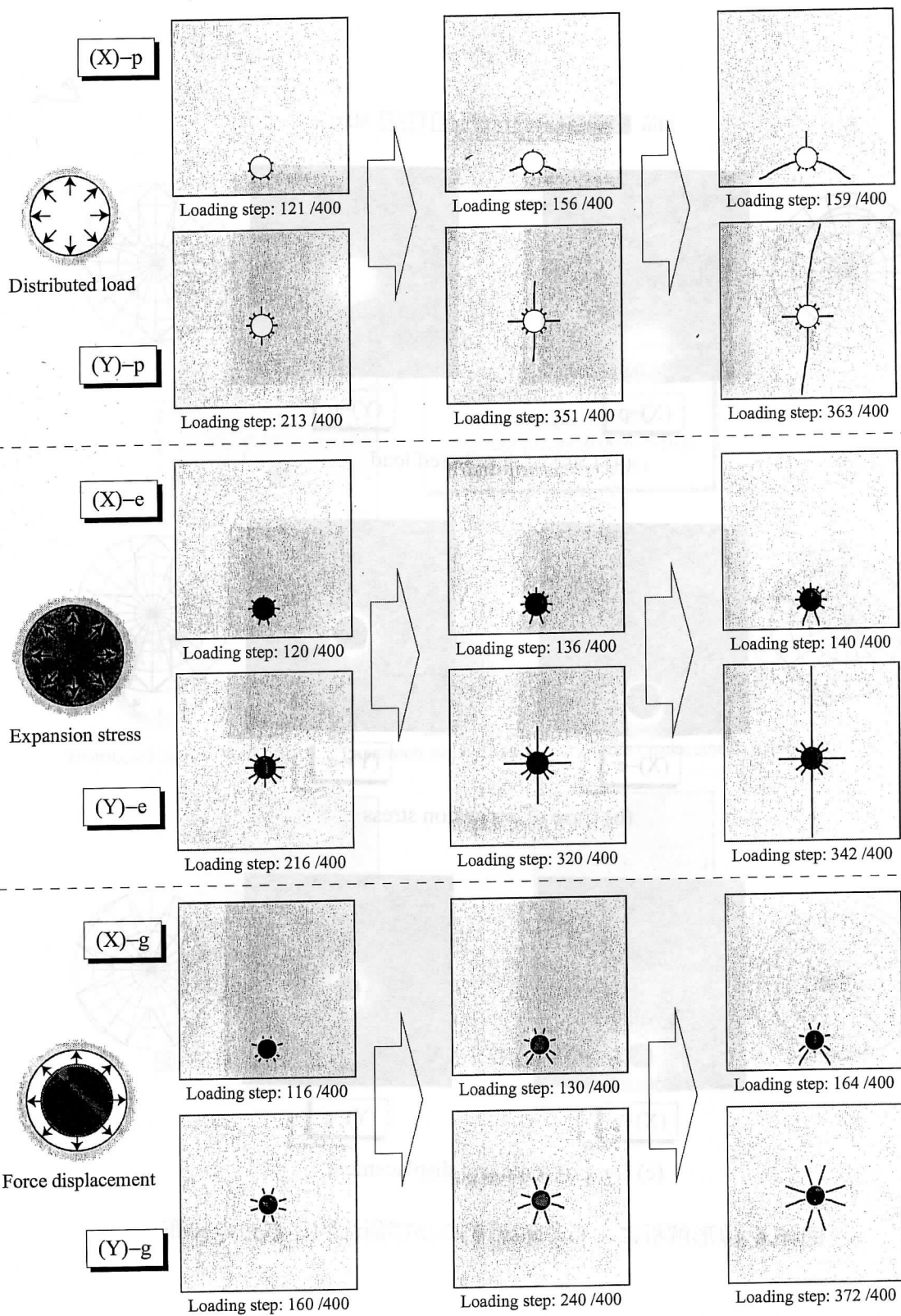


図-5.7 各腐食膨張モデルに対するFCMによるひび割れ進展解析結果の相違

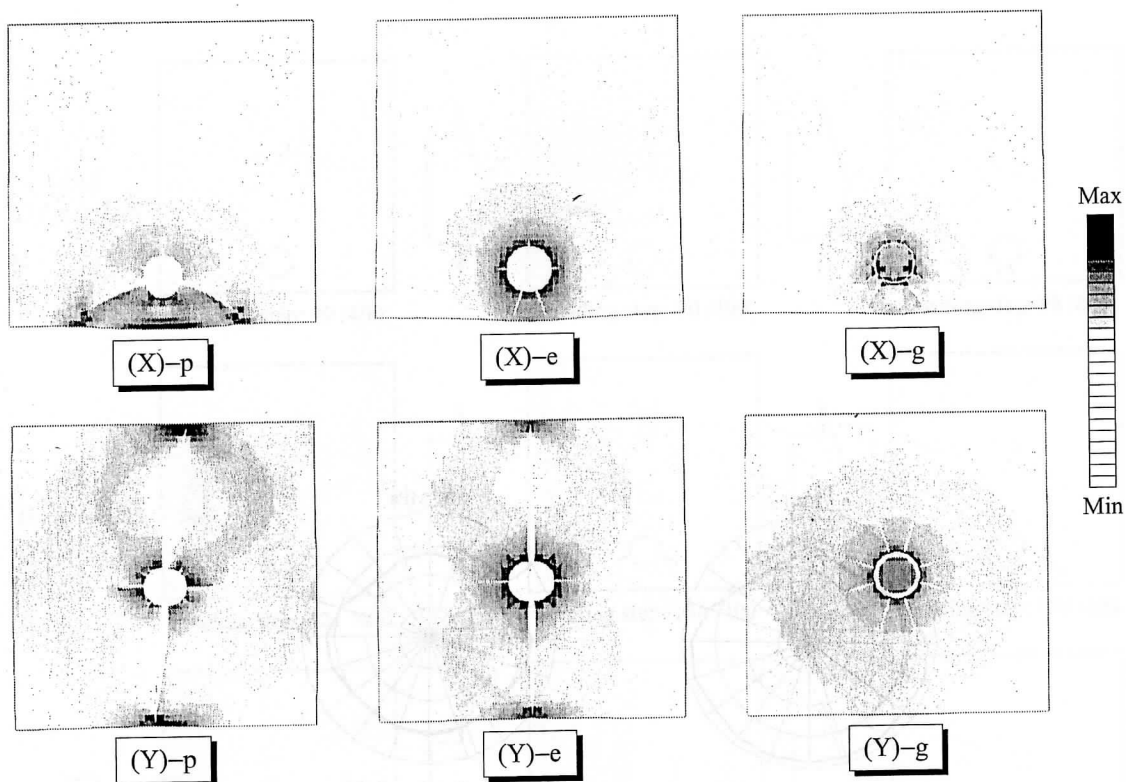


図-5.8 各腐食膨張モデルに対するひび割れ形成を含む変形図と von-Mises 応力分布

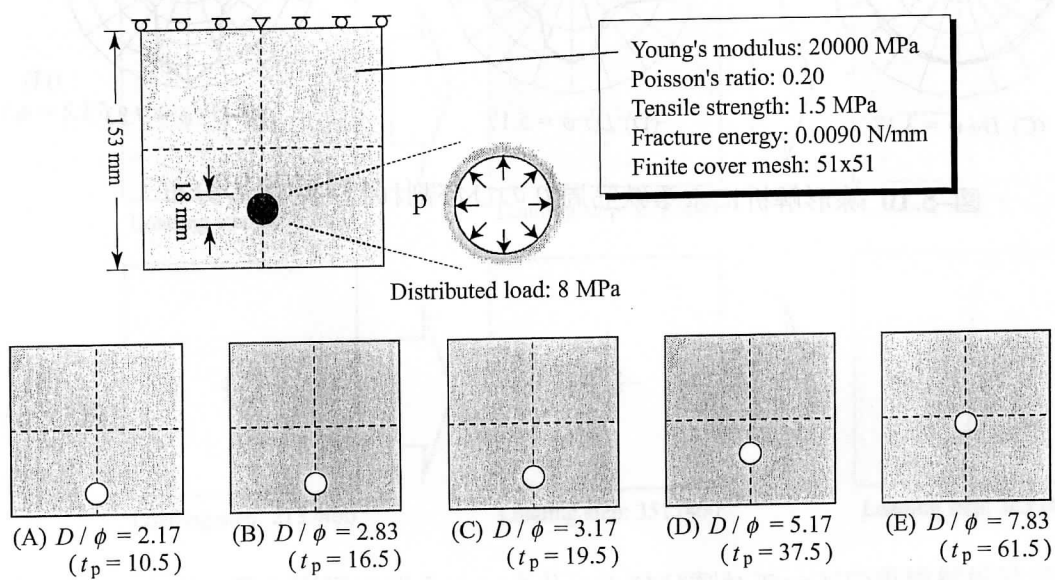


図-5.9 コンクリートひび割れモードの再現解析モデル

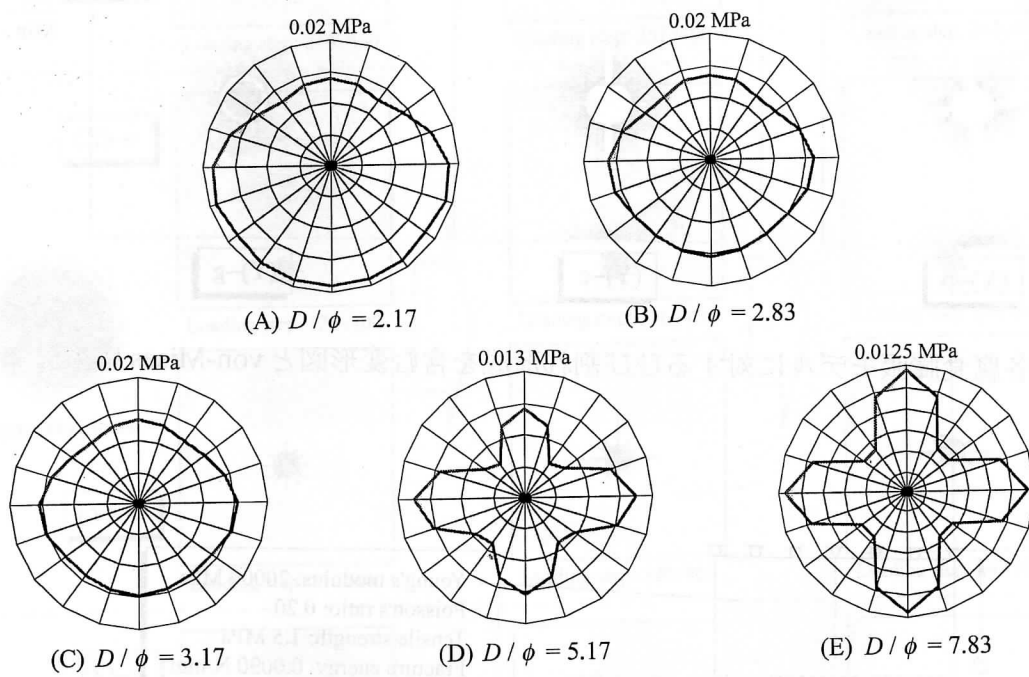


図-5.10 線形解析による鉄筋周りのひび割れ判定応力の分布

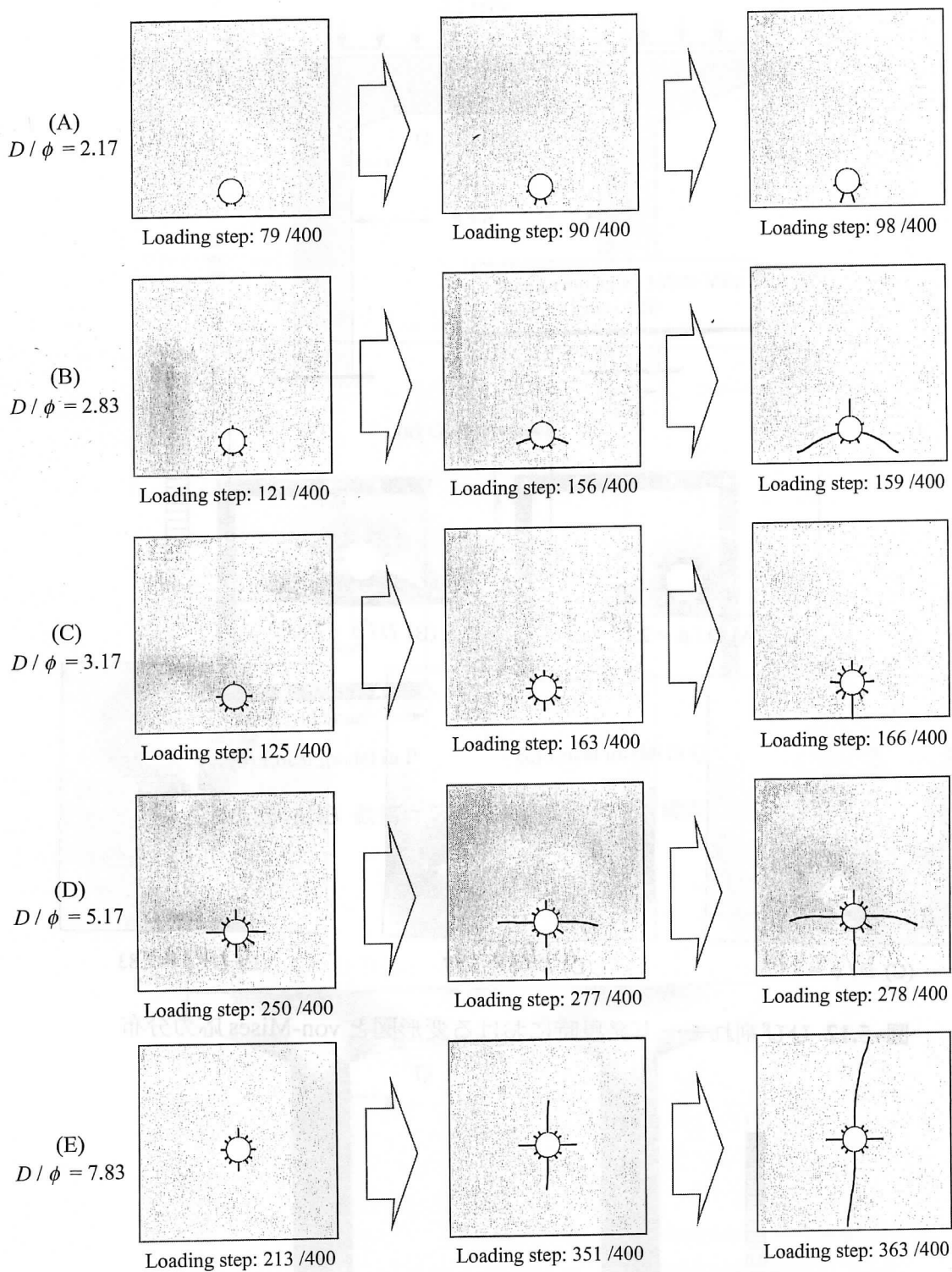


図-5.11 鉄筋の腐食膨張に伴うコンクリートひび割れモードの再現解析結果

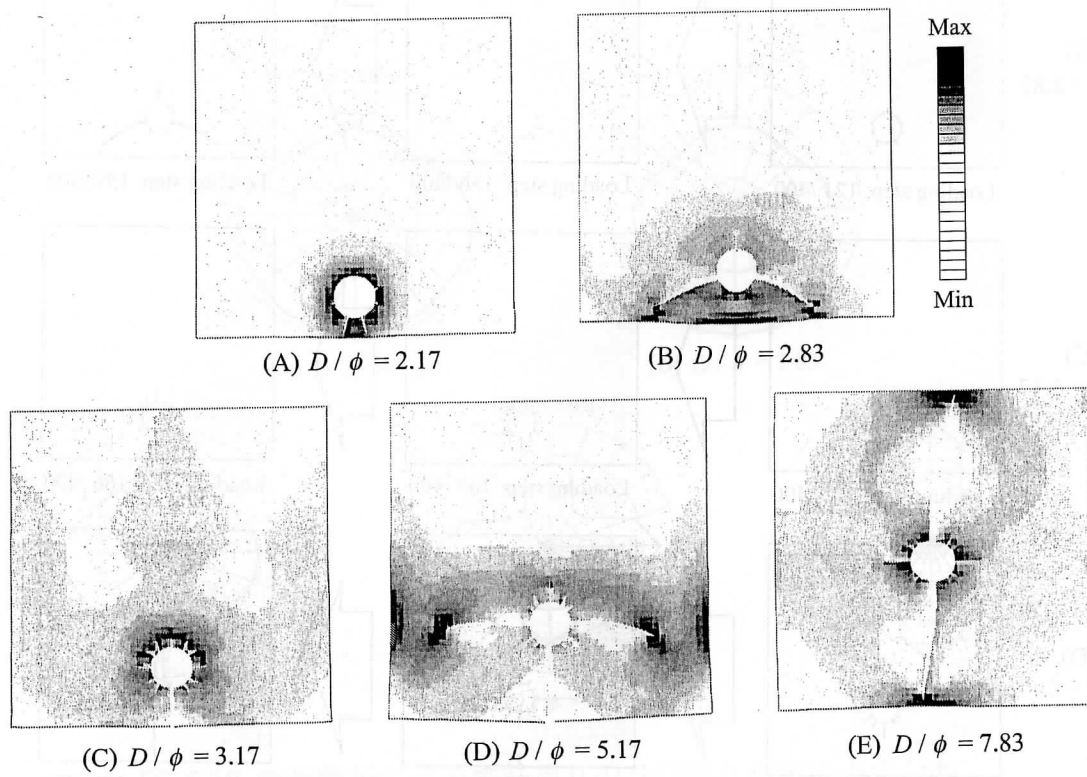
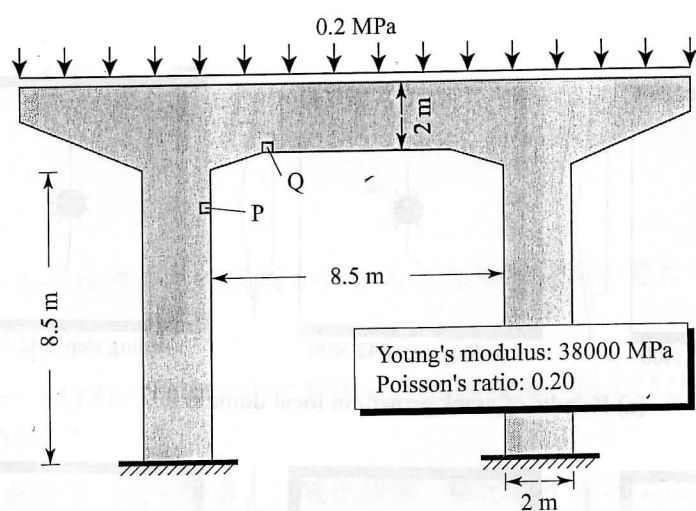
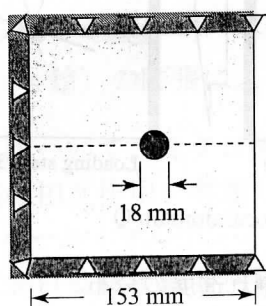


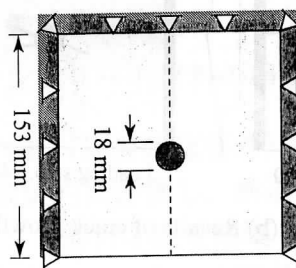
図-5.12 ひび割れモード発現時における変形図と von-Mises 応力分布



(a) Global model



(b) Local model in P



(c) Local model in Q

図-5.13 鉄筋コンクリート製ラーメン橋脚

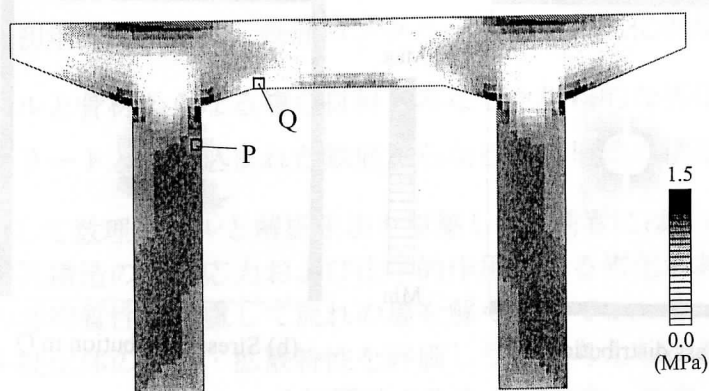
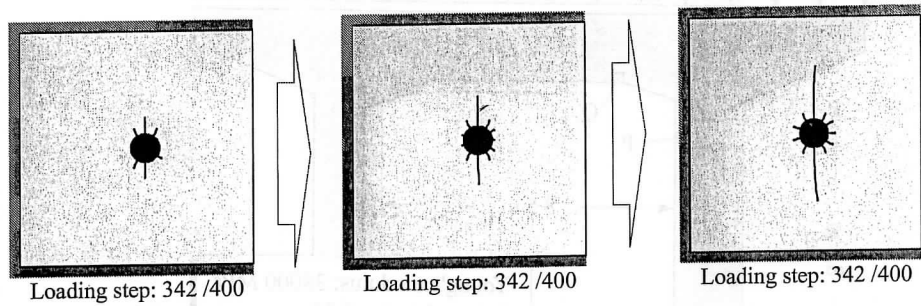
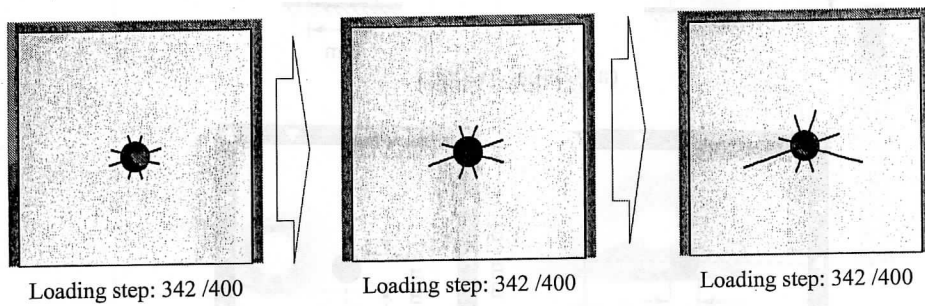


図-5.14 全体構造の von-Mises 応力分布



(a) Results of crack growth in local domain P



(b) Results of crack growth in local domain Q

図-5.15 ローカル構造のひび割れ進展の分布

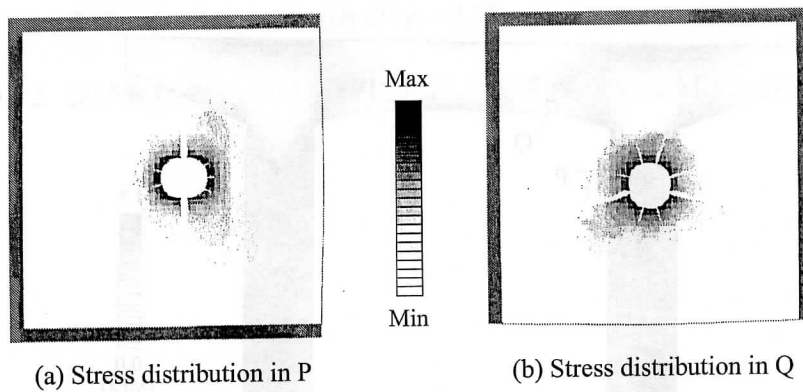


図-5.16 ローカル構造のひび割れ進展と von-Mises 応力分布

第6章 結 言

コンクリートをモルタル・粗骨材からなる2相複合材料と見なして、鉄筋コンクリート構造における、

- (a) コンクリート材料の温度変化に起因した膨張収縮（およびひび割れ）過程（物理的作用）
- (b) 鉄筋の腐食因子（水・酸素・二酸化炭素・塩化物イオンなど）の拡散過程（物質移動）
- (c) 腐食因子による不動態皮膜の欠損と鉄筋の腐食過程（電気化学的作用）
- (d) 腐食生成物（≒錆）の膨張によるコンクリート材料の損傷過程（物理的作用）

の各劣化プロセスについて、マイクロ構造内部（代表体積要素）における物理的および電気化学的作用の相互作用を考慮して数値的に評価し、構造全体の寿命予測を可能とするマルチスケール・マルチフィジックス解析手法を構築した。具体的には、コンクリート材料における微視的非均質性としてモルタルと粗骨材からなる2相複合構造に着目し、これをマイクロ構造（代表体積要素）とみなして均質化法を適用することで、コンクリートのマクロな浸透／拡散特性、剛性、膨張収縮特性、強度特性などの経時的な変化過程の評価と、マイクロ構造内部で起こりうる様々な熱力学的挙動および化学反応に起因して、セメント硬化体の劣化、モルタル・骨材界面の剥離、メゾスケールの（代表体積をまたぐほどのサイズの）ひび割れ発生など、マイクロな構造形態が変化することを考慮したマクロな特性評価が可能な数値解析ツールを開発した。

本研究では、初年度において、鉄筋コンクリート構造の劣化現象を

- [1] モルタルと骨材からなる複合材料とみなした材料的な劣化
- [2] コンクリートと埋め込まれた鉄筋からなる複合構造の構造的な劣化

の2種類に限定して数理モデルと解析手法を構築した。前者には、本来 μm オーダーのスケールで細孔構造の温度応力および化学的作用による劣化があり得るし、またこのレベルでの非均質性を考慮して流れの場を解くことで mm オーダーにおける平均的なセメント硬化体の浸透・拡散特性を評価しようと考えられるが、本研究ではこれらを見捨て mm オーダーの非均質性のみを考慮した。また、前者[1]と後者[2]には、それぞれ以下の評価項目を考慮可能な手法の開発を行った：

- A. マクロな浸透／熱伝導・物質拡散・変形性能・強度特性とその経時変化の評価
【均質化法の適用】

B. 鉄筋の腐食・膨張を外的作用としたコンクリートのひび割れ過程【有限被覆法（FCM）による数値解析】

項目 A については、マクロスケールにおける材料特性をメゾスケールの非均質性に対して均質化法を適用することで、新規のミクロ・マクロ連成モデルを提案した。具体的には、コンクリート材料のメゾ構造の経時的損傷によりマクロな材料特性が変化することを考慮した均質化法の定式化を行い、劣化状況に応じたマクロ物性評価を可能にした。時間の都合上、これらのマルチスケール解析により評価したマクロ特性については実験的検証は行わず、代わりに既報告あるいは物理的洞察に照らして妥当性の検証を行った。また、このように各物理現象に対するマルチスケール連成解析を個別に行うツールを整えるのと平行して、項目 B に関連して、有限被覆法を適用して鉄筋腐食に伴う膨張圧に起因したコンクリートのひび割れ解析も実施し、鉄筋のかぶりに応じたひび割れモード発現のメカニズムについて議論した。

第2年度には、前年度に構築した数理モデルと解析手法を発展させ、統合化することで、局所的な劣化から構造全体に至るひび割れ現象までを統一的に解析可能なシミュレーションツールを開発した。具体的には、コンクリート構造の実際の供用状況を考慮して、ひび割れ挙動をできる限り忠実に再現することで構造全体の力学挙動を捉え、これをミクロ構造に反映させて、材料内部でのひび割れによる劣化挙動を把握することが可能で、かつその局所挙動を全体構造の材料特性に反映させるという新しいミクロ・マクロ相互作用を評価可能なグローバル・ローカル解析手法とした。これは、前述の A および B に対応する数値解析手法を統合化したもので、飛来塩分の拡散から鉄筋腐食、局所ひび割れをシミュレートし、マクロな剛性低下とマクロスケールのひび割れへの進展を追跡できる解析ツールである。検証として、局所ひび割れに起因して、マクロ変形特性の低下だけではなく、拡散特性が向上することで、コンクリート構造全体の劣化に対してより不利に働くことなどを簡単な数値解析によって確認した。また、ひび割れ進展現象については、これまでに開発してきた有限被覆法の精度を高めるだけでなく、非均質構造に対する多重被覆モデリング手法を提案して、複雑なミクロ構造まで対応可能にした。特に、鉄筋に対するコンクリートのかぶり距離とひび割れモードとの関係を精度よくシミュレートできることを例示した。

付 録 A 熱拡散問題の均質化法に関する補足事項

A.1 3次元領域における積分の分離公式

A.1.1 体積積分の分離公式

$\Omega^\epsilon \in \mathcal{R}^3$ における Y -periodic な関数 $\varphi^\epsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の体積積分について、次のようなミクロおよびマクロスケールの積分領域への分離公式が成り立つ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\epsilon} \varphi^\epsilon(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $|Y|$ はユニットセル全体の体積である。

A.1.2 3次元領域における積分の分離公式

多孔質体の固体領域 $\Omega^\epsilon \in \mathcal{R}^3$ における Y -periodic な関数 $\varphi^\epsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を孔の内表面において表面積分する場合、次のようなミクロおよびマクロスケールの積分領域への分離公式が成り立つ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S^\epsilon} \epsilon \varphi^\epsilon(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_S \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \right] d\mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

ここで、 S^ϵ は領域内にある孔の表面の総体、ミクロスケールで測る S はユニットセル内部の孔の境界であり、 $|Y|$ はユニットセル全体の体積である。

A.2 不規則な介在物分布に対する解析精度

不規則に介在物が分布する非均質材料に対して、周期性の仮定すなわち周期境界条件の適用性について検討する。ここでは、図-A.1に示されるような介在物の分布が 15×15 と 20×20 の2例を検討対象として取り上げる。熱拡散解析の条件は図-3.4と同様であり、図-A.1のモデルを直接的に有限要素解析した結果と、図-3.4(a)に示される単純なユニットセルによるマルチスケール解析結果を比較する。

解析時刻と境界上の節点での応答温度の総和との関係を図-A.2に示す。ミクロ領域の中心に介在物1つを含むような理想化したユニットセルを用いた際の均質化法

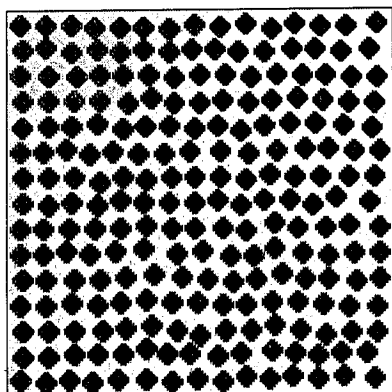
によるマルチスケール解析結果は、本例題のような不規則な構造に対しても妥当な近似解を与えている。また、式(3.39)で得られる差も(a) 0.31 %、(b) 0.071 %となっており、不規則なマイクロ構造に対する周期境界条件の設定による影響は軽微であるといえる。

A.3 特性方程式の数値的な不安定性

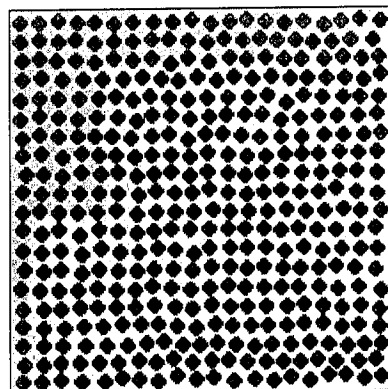
特性関数 ζ に関する特性方程式(3.29)は、マイクロ構造（ユニットセル）に各成分における単位温度勾配が与えられたときのマイクロ温度場に関連した長さの単位を有する応答関数を求めるものである。共役勾配法（CG法）を用いて式(3.29)に関する連立1次方程式を解く際、熱拡散問題における特性方程式の性質とCG法における行列 \times ベクトルの演算との相性が悪く、ユニットセルの大きさによって数値的な不安定性を引き起こすことがある。以下では、特性方程式に関する連立1次方程式の解法にCG法を適用する際の数値解析上の性質について検討する。

図-A.3に示されるような単純な $10 \times 10 \times 10$ 要素からなる2相材料の3次元立方体ユニットセルに対して、セルの長さを同図のよう0.02~1000 mmに変化させることを考える。材料パラメータは図-A.3(b)の通りとし、標準的なCG法を用いて特性方程式(3.29)に関する連立1次方程式を解く際の数値的な不安定性について検討する。

ユニットセルの長さが2 mm, 0.2 mm, 0.02 mmの場合に対するCG法の収束特性を図-A.4に、また各セルの長さとCG法の反復総数の関係を図-A.5に示す。これら図に示されるように、ユニットセルの大きさが小さくなるにつれてCG法の収束性が悪化し、反復総数が増加していくことが分かる。これは、熱拡散問題における特性方程式の性質とCG法における行列 \times ベクトルの演算との相性が悪く、ユニットセルが小さくなると数値誤差の問題が生じるからである。したがって、CG法を用いて極端に小さなセルを解析する際は、前処理や収束判定に工夫を加えるか、あるいは一時的にセルを大きくして特性方程式を解いた後に、その解に補正を加えるなどのプロセスが必要である。



(a) 15x15 inclusions and 150x150 finite elements



(b) 20x20 inclusions and 200x200 finite elements

図-A.1 不規則な介在物分布を有する非均質構造

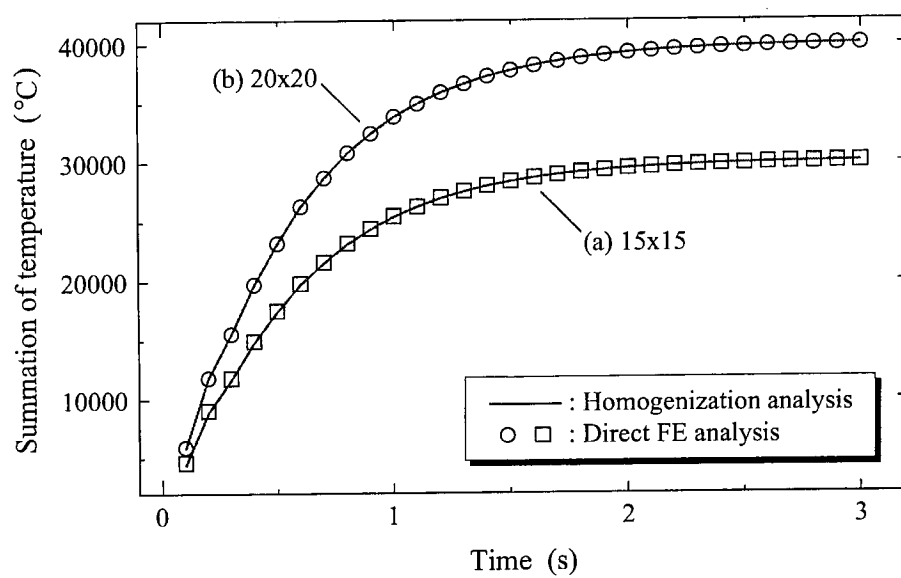
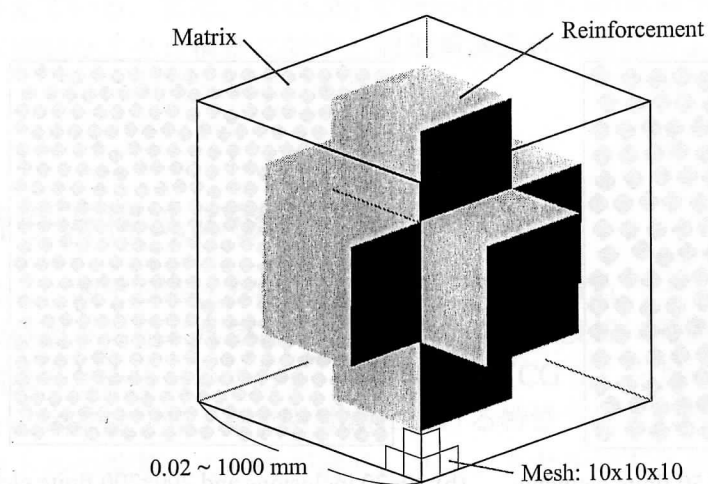


図-A.2 不規則な介在物分布に対するマルチスケール解析の解析精度



(a) 3D unit-cell

	Matrix	Reinforcement
Heat conductivity (W/mK)	30	3

(b) Material parameters

図-A.3 特性方程式の数値的特性の検討に用いる3次元解析モデル

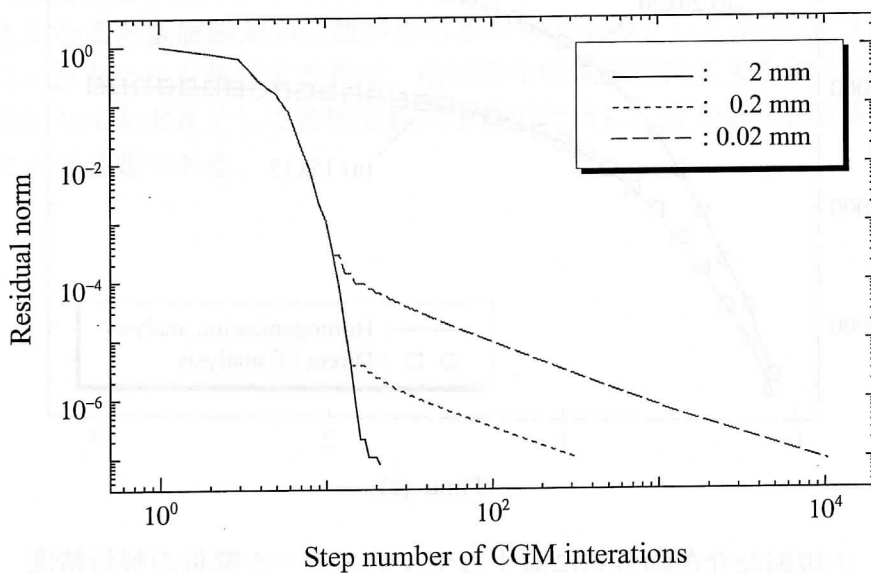


図-A.4 ユニットセルのサイズに対する共役勾配法の収束特性

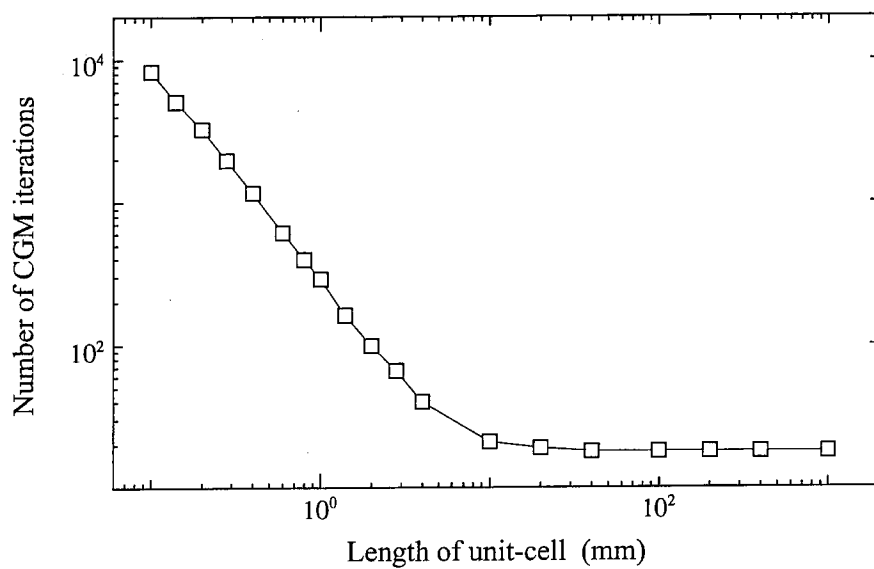


図-A.5 ユニットセルのサイズに対する共役勾配法の反復回数